ゴールドスタイン

新版

古典力学(下)

瀬川富士
矢野　忠 共訳
江沢康生

物理学叢書
11・b

吉岡書店

新版 古典力学
（下）

ゴールドスタイン著
瀬　川　富　士
矢　野　　　忠訳
江　沢　康　生

物理学叢書
11b

吉岡書店

CLASSICAL MECHANICS

SECOND EDITION

Herbert Goldstein
Columbia University

私の恩師であり
かつ友人でもある
ルイス J. クライン先生
の想い出に

This volume is a Japanese translation of CLASSICAL MECHANICS, Second Edition, by Herbert Goldstein published and sold throughout the world by permission of Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading, Massachusetts, U. S. A., the owner of all rights to publish and sell the same.

 Library of Congress Catalog Card No. 79-23456.

目　　次

（下　巻）

付　録

≪上巻主要内容≫

第8章　Hamiltonの運動方程式

p.339

力学のLagrange形式(Lagrangian formulation)は，主として初めの2章で展開され，それから後の議論はその応用といった性質のものであったが，それらの応用はやはりラグランジアンを用いるという手続きの枠の中で取り扱われてきた．この章でわれわれは，力学の形式的な展開をさらに進めて，Hamilton形式(Hamiltonian formulation)として知られている，力学の理論のもう1つの表現に注意を向けることにしよう．このようにしても，何も物理的に新しい内容が付け加わるわけではない。われわれは単に，すでに確立されている物理的な原理を用いて計算を行うための，別な(そしてもっと有力な)方法を得ることになるだけである．また，力学の問題を解くということ自体に対しては，ハミルトニアンを用いる方法が，ラグランジアンを用いる方法よりも特にすぐれているというわけでもない．むしろ，ハミルトニアンを用いる方法の有用性は，物理学の多くの分野において，理論的な拡張に対する枠組を与えてくれるということにある．古典力学の範囲内では，それはHamilton-Jacobiの理論や摂動論的なアプローチのような，より高度の発展に対する基礎となっている．古典力学以外では，現在の統計力学や量子力学は，その大部分がHamilton形式を用いて構成されている．以下の章では，力学系はホロノミックであるとし，また力は1元的(monogenic)，すなわち，位置だけの関数であるポテンシャル，あるいは速度をも含む第1－5節で論じた型の一般化されたポテンシャルから導かれるものと仮定する．

8－1　Legendre変換とHamiltonの運動方程式

Lagrange形式(非相対論的)においては，自由度がnの系に対しては，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{8-1}$$

という形の n 個の運動方程式が成立する．これらの方程式は時間について2階の微分方程式であるから，系の運動は，$2n$ 個の初期値，例えばある時刻 t_1 における n 個の q_i と n 個の $\dot{q}_i$ の値，あるいは**2つの**時刻 t_1 と t_2 における n 個の q_i の値，が指定されたときにはじめて決定される．このような系の状態を，その座標が n 個の一般化座標であるような n 次元の**配置空間**(*configuration space*) p.340 の中の点で表わし，系を表わす点が配置空間でたどる径路を時間的に追跡しよう．物理的には，ラグランジアンを用いる立場からすれば，独立な自由度が n の系の問題は，n 個の独立変数 $q_i(t)$ についての問題であって，$\dot{q}_i$ は q_i の時間に関する導関数に対する略記法にすぎない．

Hamilton 形式は，基本的に異なった描像に基づいている．そこでは，運動を**1階の**運動方程式を用いて記述しようとするのである．運動を決定する初期条件の数は，やはり $2n$ 個であるから，$2n$ 個の**独立変数**を用いて表わされた，$2n$ 個の独立な1階の微分方程式が必要になる．したがって，この $2n$ 個の運動方程式が，$2n$ 個の独立変数を座標とする**位相空間**(*phase space*)の中の，系を表わす点の振舞いを記述することになる．このように，独立変数の数を2倍にするときには，そのうちの半分を n 個の一般化座標に選ぶことは(必然的ではないけれども)自然なことである．後でわかるように，残りの半分の独立変数を，以前に導入された((2−44)式参照)，

$$p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}, \tag{8-2}$$

によって定義される一般化運動量あるいは**共役運動量**(*conjugate momenta*) p_i に選ぶと，この定式化はほとんど対称的なものになる． (q, p) という量の組は**正準変数**(*canonical variables*)として知られている*.

しかしながら，数学的な観点からすれば，これまででも q_i と $\dot{q}_i$ とは異なった

---

*) 特に断わらない限り，今後は記号 p は，共役あるいは正準運動量に対してのみ用いることにする．力が速度に依存するときには，正準運動量は，対応する力学的運動量(mechanical momentum)とは異なるであろう((2−47)式参照)．

変数として扱われてきたということができるであろう．実際，Lagrange の方程式(8－1)において，L の q_i に関する偏導関数は，他のすべての q_i およびすべての $\dot{q}_i$ を一定に保ってとられたものを意味しており，同様に $\dot{q}_i$ に関する偏導関数を求める際には，すべての q_i は一定に保たれているのである．数学の問題として厳密に取り扱うと，Lagrange 形式から Hamilton 形式への変換は，力学的な関数において，変数を $(q, \dot{q}, t)$ の組から (q, p, t) の組へ変換することに対応している．ここに p は q，$\dot{q}$ と(8－2)式によって関係づけられているものである．このような変数変換の手続きは，**Legendre 変換**[†](*Legendre transformation*)によって与えられるが，この変換は正に今考えている型の変換に最も適しているものである．

2つの変数 x, y だけの関数 $f(x, y)$ を考えよう．f の微分は，

$$df = u\,dx + v\,dy, \tag{8-3}$$

の形をしている．ここで，

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{8-4}$$

p.341
である．さて，x, y を変数とする記述から，u, y を変数とする記述に移ろう．そうすると，微分は du および dy を用いて表わされる．g を次の式で定義される u, y の関数とする．

$$g = f - ux. \tag{8-5}$$

そうすると，g の微分は，

$$dg = df - u\,dx - x\,du,$$

あるいは，(8－3)式を用いて，

$$dg = v\,dy - x\,du,$$

---

†) Legendre変換の幾何学的解釈と，それが微分方程式論において果たす役割については，R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, pp. 32–39, 1962 を見よ．

で与えられる．これはまさにわれわれの求めていた形である．x, v は今度は u と y との関数であって，

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, \qquad v = \frac{\partial g}{\partial y}, \tag{8-6}$$

の関係式で与えられる．これは実質的には，(8－4)式の逆である．

このように定義されたLegendre変換は，熱力学においてしばしば用いられる．例えばエンタルピー(enthalpy) X は，エントロピー(entropy) S と圧力 P の関数であって，次のような性質を持っている．

$$\frac{\partial X}{\partial S} = T, \qquad \frac{\partial X}{\partial P} = V.$$

したがって，

$$dX = TdS + VdP,$$

である．ここで，T および V はそれぞれ温度および体積である．エンタルピーは，等エントロピー(isentropic 断熱可逆)でかつ等圧の過程を考えるときに有用である．しかし，むしろ等温等圧過程を取り扱わなければならないことがしばしばある．そのような場合には，T および P を独立変数とする熱力学的関数が必要になる．求める関数は，Legendre変換によって，次のように定義すれば得られることがわかる．

$$G = X - TS\ .$$

このとき，dG は

$$dG = -SdT + VdP, \tag{8-7}$$

で与えられる．G は，よく知られたGibbs関数すなわち自由エネルギー(free energy)であって，その性質は(8－7)式によって正しく与えられる．

$(q, \dot{q}, t)$ から (q, p, t) への変換と，(8－3)式から(8－5)式までの間で考えた変換とのちがいは，変換されるべき変数の数が1つよりも多いという点だけである．ラグランジアンの代りに，(8－5)式と負号を除いて同じように定義され

た関数，

$$H(q,p,t)=\dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t)\ , \qquad (8-8)$$

を取り扱おう（ここでは，もちろん和の規約が用いられている）．この H は**ハミルトニアン**（*Hamiltonian*）として知られている．H を $q,p,$ および t だけの関

p.342 数と考えると，その微分は，

$$dH=\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i+\frac{\partial H}{\partial t}dt, \qquad (8-9)$$

で与えられる．ところが，定義の式（8－8）から，この式はまた次のように書くこともできる．

$$dH=\dot{q}_i\,dp_i+p_i\,d\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt. \qquad (8-10)$$

（8－10）式の中で $d\dot{q}_i$ のかかった項は一般化運動量の定義によって零になり，また Lagrange の方程式から，

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=\dot{p}_i,$$

であるから,（8－10）式は次のような簡単な形になる．

$$dH=\dot{q}_i dp_i-\dot{p}_i dq_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt. \qquad (8-11)$$

これを（8－9）式と比べると,（8－6）式に対応する，次のような $2n+1$ 個の関係式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_i&=\frac{\partial H}{\partial p_i},\\ -\dot{p}_i&=\frac{\partial H}{\partial q_i},\end{aligned}\right\} \qquad (8-12)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}\ . \qquad (8-13)$$

（8－12）式は **Hamilton の正準方程式**（*canonical equations of Hamilton*）として知られている．これらは，系の運動を記述する $2n$ 個の1階偏微方程式の

組であって，n 個のLagrangeの方程式に代わるものである.*

Hamiltonの方程式の前半分は $\dot{q}_i$ を (q,p,t) の関数として与えている．したがって，それらは運動量 p_i を $(q,\dot{q},t)$ の関数として定義する方程式(8－2)の逆になっている．それゆえ，それらはなんら新しい情報をもたらさないと言ってもよい．正準方程式を用いて力学の問題を解くという観点に立てば，そのことは
p.343
正しい．しかし，$H(q,p,t)$ が，それがどのようにして得られたにしても，ある与えられた関数と考えられる，ハミルトニアンの描像の枠内では，Hamiltonの方程式の前半，後半の各組は，等しく独立であって，意味を持っている．前半は $\dot{q}$ が q,p および t にどのように依存しているかを述べており，後半は $\dot{p}$ について同じことを表わしている．

もちろん，ハミルトニアン H は，(2－53)式で定義されたエネルギー関数 h と同じやり方で作られ，全く同じ値を持っている．しかし，それらは異なった変数の関数である．すなわち，h はラグランジアンと同じように $q,\dot{q}$ （そして場合によっては t ）の関数であるが，一方 H は常に q,p (そして場合によっては t)の関数として表わさなければならない．この関数としての振舞いのちがいを強調するために，数値的には同じであるとしても，これらの量に対して，異なる記号が用いられたのである．

通常，おのおのの問題に対するハミルトニアンは，ラグランジアンを用いる定式化を経由して作らなければならない．通常の形式的な手順は，一連の長たらしい段階を必要とする．すなわち，

1. 1組の一般化座標 q_i を選んで，ラグランジアン $L(q_i,\dot{q}_i,t)$ を作る．
2. 共役運動量を(8－2)式によって $q_i,\dot{q}_i$ および t の関数として定義する．
3. (8－8)式を用いてハミルトニアンを作る．この段階ではまだ H ではな

---

*) ここで，canonicalという言葉は，おそらく標準的な方程式の単純で一般的な組を示す意味で用いられたものであろう．この言葉が最初に導入されたのは，1837年にC. G. J. Jacobi (*Comptes rendus de l'Academie des Sciences de Paris*, 5, p. 61) によってであると思われるが，それはHamiltonの運動方程式の摂動論への応用に関連した，多少異なった意味においてであった．この言葉は術語として急速に普及したが，それを導入した理由は，当時の人達にもはっきりしなかったらしい．Hamiltonが彼の方程式をあからさまに導入してからわずか45年後の1879年には，Thomson (Lord Kelvin) とTaitが 'canonical' という形容詞に心を動かされて，"それがなぜそう呼ばれるようになったかは言い難い" (*Treatise on Natural Philosophy*, 1879, Vol. 1, p. 307) と驚きの声をあげている．

くhである．あるいは，むしろ $q_i, \dot{q}_i, p_i, t$ の混じりあった関数といった方がよいであろう．

4. 方程式(8−2)を逆に解いて，$\dot{q}_i$ を (q, p, t) の関数として求める．この逆を求める際に起こるかもしれない困難については，以下に議論することにしよう．

5. 上の段階の結果を用いて，H から $\dot{q}$ を消去し，それを (q, p, t) だけの関数として表わす．

これで**今や**，運動の正準方程式にハミルトニアンを用いる準備ができたことになる．

多くの物理系に対しては，この長たらしい段階をかなり短縮することができる．第2−6節で述べたように，多くの問題においてラグランジアンは，一般化速度についてそれぞれ0次，1次，2次の同次式である関数の和からできている．その場合には，H は(8−8)式の処方によると，

$$H = L_2 - L_0, \tag{8-14}$$

で与えられる((2−57)式参照)．ここで，L_0 はラグランジアンの中で一般化速度に依存しない部分であり，L_2 は $\dot{q}_i$ について2次の同次式である部分である．さらに，一般化座標を定義する式が時間を陽に含まなければ，$L_2 = T$ であり，また力が保存的なポテンシャル V から導かれるならば $L_0 = -V$ である．この2つの条件が満足されるときには，ハミルトニアンは**自動的に**(*automatically*)全エネルギーになる．すなわち，

$$H = T + V = E. \tag{8-15}$$

もし，(8−14)式あるいは(8−15)式が成立すれば，上の段階3の計算の多くがいらなくなる．

p. 344

さらに手続きを短縮できることが時々ある．かなり多くの問題で，L_2 は一般化速度の2次関数であり，L_1 が同じ変数の1次関数になっていることがある．そのときには，段階2から5までで要求される代数的計算は，少なくとも形式的には，1度だけ行っておけばよい．このことを示すために，$\dot{q}_i$ を1つの列行

列$\dot{\mathbf{q}}$とまとめて表わすことにしよう．ここでなされている仮定の下では，ラグランジアンは，

$$L(q,\dot{q},t)=L_0(q,t)+\tilde{\dot{\mathbf{q}}}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\tilde{\dot{\mathbf{q}}}\mathbf{T}\dot{\mathbf{q}}. \qquad (8-16)$$

ここで，引き続き行われる演算を考慮して，1つの列行列の転置行列として，1つの行行列をあらわに用いて書いてある．また$\mathbf{a}$は列行列であり，$\mathbf{T}$は$n\times n$正方行列である(第6章で導入された対応する行列に非常によく似ている)．これらの行列の要素は共に，一般的にはqとtの関数である．共役運動量は，列行列$\mathbf{p}$を考えると，(8－2)式から，

$$\mathbf{p}=\mathbf{T}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{a}, \qquad (8-17)$$

と与えられる．これを逆に解くと(段階4)，

$$\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{a}), \qquad (8-18)$$

となる．この段階では，$\mathbf{T}^{-1}$が存在すると仮定しているが，通常は運動エネルギーの正定値性によって，それは存在する．(8－14)式の処方によって，ハミルトニアンはエネルギー関数hと同じものであって，

$$h=\frac{1}{2}\tilde{\dot{\mathbf{q}}}\mathbf{T}\dot{\mathbf{q}}-L_0,$$

によって与えられる．Hに対する正しい関数形を得るためには，(8－18)式をhの2次式の部分の$\dot{\mathbf{q}}$に代入しなければならない(段階5)．ところで，$\mathbf{T}$は明らかに対称行列であるから，その逆行列もまた対称である．それゆえ次のようになる．

$$\tilde{\dot{\mathbf{q}}}\mathbf{T}\dot{\mathbf{q}}=(\tilde{\mathbf{p}}-\tilde{\mathbf{a}})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{a}).$$

したがって，ハミルトニアンの最終的な形は，

$$H(q,p,t)=\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{p}}-\tilde{\mathbf{a}})\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{a})-L_0(q,t), \qquad (8-19)$$

となる．もしラグランジアンを(8－16)式の形に書くことができれば，その

ときには途中の段階をとばして，直ちにハミルトニアンを（8−19）式の形に書くことができる．逆行列 $\mathbf{T}^{-1}$ は，通常，

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{T}}_c}{|\mathbf{T}|}, \qquad (8-20)$$

として直接計算して求めるのが最も容易である*．ここで，$\mathbf{T}_c$ は余因子行列であって，その要素 $(\mathbf{T}_c)_{jk}$ は，$\mathbf{T}$ からその j 行と k 列を除いて得られる行列式に $(-1)^{j+k}$ を掛けたものである．容易にわかるように，$\mathbf{T}$ が対角型ならば $\mathbf{T}^{-1}$ も対角型であり，その要素は $\mathbf{T}$ の対応する要素のちょうど逆数である．

p.345

この定式化を種々の力学の問題に適用する多くの演習問題が章末にある．ここでは，2つの非常に簡単な例について考えよう．というのは，それらはこの技法のいくつかの重要な側面を示す例として，特に適しているからである．初めに，一般化座標として球面極座標 (r, θ, ϕ) を用いて，中心力の場の中の粒子の空間的な運動を考えよう．位置エネルギーは r のある関数 $V(r)$ であって，運動エネルギーは，

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2),$$

である．明らかに，ハミルトニアンは全エネルギー $T+V$ と同じであって，また $\mathbf{T}$ は対角型であるから，H の形は視察によって，

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + V(r), \qquad (8-21)$$

となる．もし，一般化座標として直交座標 x_i を選べば，ハミルトニアンは異なった形になることに注意せよ．そのときには，運動エネルギーは，

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}_i\dot{x}_i}{2} \quad ,$$

の形になり，したがってハミルトニアンは今度は，

---

*）物理学における数学的方法，あるいは行列に関する書物には，ほとんど書いてある．例えば，Margenau and Murphy, *'The Mathematics of Physics and Chemistry*, 1943 (p. 295); Hildebrand, *Methods of Applied Mathematics*, 2nd ed. 1965 (p.16); あるいは Nering, *Linear Algebra and Matrix Theory*, 1963 (p. 83) を見よ．ついでに言えば，数学者は $\mathbf{T}_c$ を $\mathbf{T}$ の随伴行列（adjoint matrix）と呼んでいる（前の185ページ参照）．

$$H(x_i, p_i) = \frac{p_i p_i}{2m} + V(\sqrt{x_i x_i}), \qquad (8-22)$$

となる．x_iに共役な正準運動量p_iを，ベクトル$\mathbf{p}$の形にまとめると便利なことがある．そうすると，ハミルトニアンは，

$$H(x_i, p_i) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{2\mathrm{m}} + V(\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}), \qquad (8-23)$$

と書くことができる．もちろん，$\mathbf{p}$の成分は，望ましい任意の座標系について，例えば球面極座標について，とることもできる．しかし，重要なことは，例えばp_θを，$(\mathbf{p})_\theta$と書かれる$\mathbf{p}$のθ成分と混同しないことである．p_θは座標θに共役な正準運動量であり，$(\mathbf{p})_\theta$は直交座標に共役な運動量ベクトルのθ成分である．次元から考えても，それらが全く別々の量であることは明らかである．すなわち，p_θは角運動量の次元をもち，$(\mathbf{p})_\theta$は線運動量の次元をもっている．**今後，正準運動量を表わすのにベクトルが用いられるときには，いつでも，直交位置座標に共役な運動量に関するものであるということにしよう．**

p. 346

第2の例として，電磁場の中を運動している1個の(非相対論的な)粒子を考えよう．(1−66)式によって，この系に対するラグランジアンは，

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v},$$

である．直交座標での位置座標を一般化座標として用いると，ラグランジアンは，

$$L = \frac{m\dot{x}_i\dot{x}_i}{2} + \frac{q}{c}A_i\dot{x}_i - q\phi, \qquad (8-24)$$

のように書くことができる．ここで，ポテンシャルϕと$\mathbf{A}$は一般にx_iと時間の関数である(qはここでは，いうまでもなく粒子の電荷であって，一般化座標ではない)．今度は，一般化速度について1次の項があり，行列$\mathbf{a}$は要素qA_i/cを持っている．このUの中の1次の項のために，ハミルトニアンは$T+U$とは**ならない**．しかしながら，この場合でもそれは依然として全エネルギーである．なぜなら，電磁場の中の“位置”エネルギーはϕのみによって決められるからである．正準運動量は，(8−2)または(8−17)式によって，

$$p_i = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i, \qquad (8-25)$$

であり，ハミルトニアンは((8－19)式参照)，

$$H = \frac{\left(p_i - \frac{q}{c}A_i\right)\left(p_i - \frac{q}{c}A_i\right)}{2m} + q\phi, \qquad (8-26)$$

となって，これは粒子の全エネルギーである．ここでも再び，運動量 p_i は１つのベクトル $\mathbf{p}$ にまとめられ，H は，

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + q\phi, \qquad (8-27)$$

と書くことができる．ふたたび，$\mathbf{p}$ は x_i に共役な運動量のみに関する記法であることを忘れてはならない．

Hamilton の運動方程式では，座標と運動量は完全に対称的な形では取り扱われていないということが後にわかるであろう．すなわち，$\dot{p}$ に対する方程式には，$\dot{q}$ に対する方程式にはない負号がつくのである．完全に対称な方程式がでてくるような変数のとり方や，２組の変数を１組にまとめるような変数のとり方を見出そうとする工夫がいろいろなされてきた．これらのやり方のほとんどは，風変わりであるという価値しかないが，そのうちの１つの方法は，正準方程式やそれに関連した式を取り扱うのにすっきりとしていてしかも有力なものであることがわかっている．

自由度が n の系に対して，$2n$ 個の要素をもち，それらが，

$$\eta_i = q_i, \qquad \eta_{i+n} = p_i; \qquad i \leq n, \qquad (8-28)$$

p.347
で与えられるような列行列 $\boldsymbol{\eta}$ を作ろう．同様に，列行列 $\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}$ は，

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)_{i+n} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \qquad i \leq n, \qquad (8-29)$$

で与えられる要素をもつものとしよう．最後に $\mathbf{J}$ は，$2n \times 2n$ 正方行列で，

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad (8-30)$$

のような形の $n\times n$ 零行列と単位行列から作られるものとする．ここで $\mathbf{0}$ は $n\times n$ 行列でその要素がすべて零であるものであり，$\mathbf{1}$ は通常の $n\times n$ 単位行列である．このときHamiltonの運動方程式は，

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}=\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\eta}}, \qquad (8-31)$$

のような簡潔な形に書くことができる．正準運動方程式を書き表わすこの方法のことを，行列記法または**シンプレクティック**記法（*symplectic* notation）* におけるHamiltonの方程式と言うことにしよう．以後の章で，この行列形式の方程式をしばしば用いるであろう．後で使うために，容易に証明できる $\mathbf{J}$ のいくつかの性質について述べておこう．行列 $\mathbf{J}$ は（標準的な名前はないけれども），Pauliの行列 $\boldsymbol{\sigma}_2$ の i 倍を $2n\times 2n$ 行列に拡張したようなものである．それゆえ，その2乗は $2n\times 2n$ 単位行列に負号をつけたものである．

$$\mathbf{J}^2=-\mathbf{1}. \qquad (8-32)$$

$\mathbf{J}$ はまた，直交行列でもある．

$$\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{J}=\mathbf{1}. \qquad (8-33)$$

したがって，次の式が成立する．

$$\tilde{\mathbf{J}}=-\mathbf{J}=\mathbf{J}^{-1}. \qquad (8-34)$$

直交性から，行列式の2乗が1になることが導かれるが，実際にはより強い命題，すなわち，

$$|\mathbf{J}|=+1, \qquad (8-34')$$

を証明することができる．

---

*）*symplectic*という言葉は，"からみ合わされた"（"intertwined"）という意味のギリシャ語からきたもので，$\dot{q}$ が p に関する導関数と組み合わされ，$\dot{p}$ が同じく q に関する導関数に負号をつけたものと組み合わされているようなHamiltonの方程式に対しては特に適切な言葉である．この言葉は，最初H Weylが1939年に彼の著書，*The Classical Groups*（1939年の初版，1946年の第2版共にp. 165）で導入したものである．

8－2　サイクリック座標と保存則

第2－6節の定義によれば，サイクリック座標q_jというのは，ラグランジアンの中に現われない座標である．そうすると，Lagrangeの方程式によって，q_jに共役な運動量p_jは定数である．しかし，(8－9)式と(8－10)式を比較して
p.348
みると，

$$\dot{p}_j=\frac{\partial L}{\partial q_j}=-\frac{\partial H}{\partial q_j},$$

が成立していることがわかる．したがって，サイクリック座標はハミルトニアンの中にも現われないであろう*．逆に，ある一般化座標がHの中に現われなければ，それに共役な運動量は保存される．このようにして，第2－6節で得られた運動量の保存則は，LにHを代入するだけでHamilton形式に移されるのである．特に，物理系の不変性あるいは対称性と，運動の定数との関係も，ハミルトニアンを用いて導くことができる．例えば，系が完全に孤立していて，粒子間に作用する内力だけがあるとすると，力や，その後の運動に影響を与えることなしに，その系を剛体的な集合のように動かすことができる．このような系は，剛体的な変位のもとで不変であると言われる．したがって，このような剛体的な運動を記述する一般化座標はハミルトニアンの中には陽に現われず，それに対応する共役運動量は保存されるであろう．もし剛体的な運動が，ある特定の方向に沿った並進であれば，そのとき保存される運動量は，系の全線(正準)運動量の，直交座標系におけるその方向の成分である．方向は任意にとれるから，系の全線運動量は保存される．剛体的な変位が回転である場合もあるであろう．その場合には，全角運動量ベクトルが保存される．系が外力と相互作用する場合でさえも，保存される正準運動量に導くような，状況のある対称性が存在する場合もあるであろう．いま，系がある与えられた軸のまわりに対称であり，したがってHがその軸のまわりの回転に対して不変であるとしよう．そのときには，Hは明らかにその軸のまわりの回転角を含むことはでき

---

*) この結論は(8－8)式の定義からも導かれる．それは，Hと$-L$とのちがいは$p_i\dot{q}_i$だけであって，これはq_iを陽に含んでいないからである．

ず，したがって，その特定の角変数はサイクリック座標でなければならない．それゆえ，第2－6節におけると同じように，その軸のまわりの角運動量の成分は保存されることになる．

第2－6節における h についての考察は，すでに，もし L（そして（8－13）式によって H も）が t の陽な関数でなければ，そのとき H は運動の定数であることを示している．このことは，ハミルトニアンの時間に関する全導関数を，

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial t},$$

のように書いてみれば，運動方程式（8－12）式から直ちにわかる．すなわち，運動方程式（8－12）によって，右辺の初めの2項は互いに打ち消し合い，したがって次の式が得られる．

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}. \qquad (8-35)$$

p.349
このように，もし t が L の中に陽に現われなければ，H の中にも現われず，H は時間的に一定である．

さらに第2－6節では次のことが証明された．すなわち，もし一般化座標を定義する変換式（1－38），

$$\mathbf{r}_m=\mathbf{r}_m(q_1,\ldots,q_n;t),$$

が時間に陽に存在せず，またポテンシャルが速度に依存しなければ，H は全エネルギー $T+V$ になるということである．H が運動の定数であるということと，全エネルギーに等しいということは別々のことであり，一方に対して十分な条件も他方に対しては十分であるとは限らない．（1－38）式は時間を陽に含むが，H は含まないということも起こり得る．この場合には H は運動の定数ではあるが，全エネルギーでは**ない**．第2－6節においても強調されたように，ハミルトニアンは，その値も関数形も共に，一般化座標の初めの選び方に依存する．これに対して，ラグランジアンは特定の処方 $L=T-V$ で与えられ，その処方の枠内では一般化座標の変換は L の関数形を変えるかもしれないが，その値は変えない．他方，ハミルトニアンの定義の式（8－8）において，異なった一般

化座標の組を用いると，ハミルトニアンは全く異なった量になるかも知れないのである．例えば，ある一般化座標に対してはHは保存されるが，他の選び方をするとHが時間的に変わるようになるかも知れないのである．

これらの点のいくつかを示すために，多少人為的な１次元系の簡単な例を考えよう．質量mの質点が，バネ定数kのバネにつながれているとする．また，バネの他端は外部の装置によって速さv_0で一様に動いている質量のない台車に取り付けられているとする（図８－１参照）．もし一般化座標として，静止系における質点の位置xをとると，系のラグランジアンは明らかに，

$$
\begin{aligned}
L(x, \dot{x}, t) &= T - V \\
&= \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}(x - v_0 t)^2,
\end{aligned}
\qquad (8-36)
$$

である（簡単のために，原点は $t = 0$ において台車がそこを通過するように選

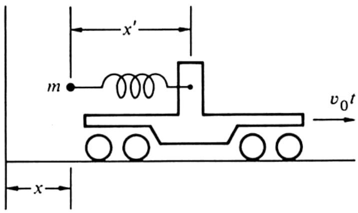


図８－１
一様に動いている台車に取りつけられた調和振動子の例．

p.350
んだ）．対応する運動方程式は，明らかに，

$$
m\ddot{x} = -k(x - v_0 t),
$$

である．この方程式を解くための１つの明白な方法は，未知数を，

$$
x' = x - v_0 t, \qquad (8-37)
$$

によって定義される$x'(t)$へ変換することである．そうすると運動方程式は，

$$
m\ddot{x}' = -kx', \qquad (8-38)
$$

となる．(8－37)式から，x'は台車に相対的な質点の変位である．また(8－38)式は，台車の上の観測者には，質点は単振動をすることを述べているが，このことはGalileiの相対性原理における等価性の原理から予想されることである．

運動の性質についてはわかったから，次にHamilton形式について考えてみよう．xは質点の直交座標であり，ポテンシャルは一般化速度を含まないから，xを用いたハミルトニアンは，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和，すなわち全エネルギーである．ハミルトニアンの関数形は，

$$H(x,p,t)=T+V=\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}(x-v_0t)^2, \qquad (8-39)$$

で与えられる．ハミルトニアンは全エネルギーであるが，tを陽に含んでいるので保存されない．物理的には，このことは理解できる．すなわち，振動する質点の反作用に抗して，台車を一様に動かしつづけるために，エネルギーは"外部の物理的装置"に流れ込んだり，そこから流れ出したりしなければならないからである*.

さて次に，はじめから相対座標x'を用いてLagrange形式で定式化したとしよう．上と同じやり方で，ラグランジアンは，

$$L(x',\dot{x}')=\frac{m\dot{x}'^2}{2}+m\dot{x}'v_0+\frac{mv_0^2}{2}-\frac{kx'^2}{2}, \qquad (8-40)$$

で与えられる．対応するハミルトニアンを作り上げるときには，今度は$\dot{x}'$の1次の項があることに注意しよう．**a**の成分は1つだけでmv_0である．新しいハミルトニアンは次のようになる．

$$H'(x',p')=\frac{(p'-mv_0)^2}{2m}+\frac{kx'^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}. \qquad (8-41)$$

最後の項は，x'もp'も含まない定数であることに注意しよう．それは，そうしたければH'から落とすことができ，そうしても運動方程式には何の影響もない．さて，H'は系の全エネルギーではないが，保存される．最後の項を除けば，H'は動いている台車に相対的な質点の運動の，全エネルギーと同じであることが

---

*) 言い換えれば，動いている台車は，質点に対する時間に依存する拘束になっており，拘束力は実際の(仮想的ではない)変位に際して仕事をしているのである．

p. 351
容易にわかる．２つのハミルトニアンは，その値，時間依存性および関数形は異なっている．しかし読者は，両方共同じ質点の運動方程式に導くことを容易に証明することができる．

8−3 Routh の方法と定常運動のまわりの振動

前に，Hamilton形式は力学の問題を直接解くということに関しては，特に有力な方法ではないということを述べた．$2n$ 個の１階の方程式を解くのに，いくつかの変数，例えば p 変数を消去する以外に方法がないということがしばしばあるが，その場合には直ちに２階の Lagrange の運動方程式に戻ってしまう．しかしながら，１つの重要な例外があることに注意しなければならない．すなわち，ハミルトニアンを用いる方法はサイクリック座標を含む問題を取り扱うのに特に適しているのである．Lagrange形式において，ある座標，例えば q_n がサイクリックであるような場合を考えよう．ラグランジアンは，q および $\dot{q}$ の関数として次のように書くことができる．

$$L = L(q_1, \ldots, q_{n-1}; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n; t) .$$

一般化速度は，まだすべてラグランジアンの中に含まれており，それらは一般に時間の関数である．それゆえ，自由度の１つがサイクリック座標に対応していても，やはり n 自由度の問題を解かなければならない．ところが一方，Hamilton 形式では，サイクリック座標は実際，もう１つの呼び名である“無視し得る”(ignorable)座標と呼ぶのがふさわしい．なぜなら，この場合には p_n はある定数 α に等しく，したがって H は，

$$H = H(q_1, \ldots, q_{n-1}; p_1, \ldots, p_{n-1}; \alpha; t),$$

の形になるからである．このときには，ハミルトニアンは実質的には $n-1$ 個の座標だけを含む問題を記述しており，これはサイクリック座標を完全に無視して解くことができる．サイクリック座標は，初期条件から定められるべき積分定数 α を通じてだけ現われている．そしてこのサイクリック座標自身の時間的変化は，運動方程式，

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$$

を積分することによって見出される.

サイクリック座標を取り扱う場合の，Hamilton形式の利点は，Routhの工夫した方法によって，ラグランジアンを用いる方法と結びつけることができる．この方法は，本質的には，サイクリック座標に対してだけ $q, \dot{q}$ から q, p への変換を行って，それらに対してはHamilton形の運動方程式をつくり，一方残りの座標はLagrangeの方程式に従うようにするのである．サイクリックな座標
p. 352 を $q_{s+1}, \ldots, q_n$ とし，ラウシアン(Routhian)として知られる新しい関数を次の定義によって導入する[*].

$$R(q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s; p_{s+1}, \ldots, p_n; t) = \sum_{i=s+1}^{n} p_i \dot{q}_i - L. \tag{8-42}$$

そうすると，Rの微分は，

$$dR = \sum_{i=s+1}^{n} \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

によって与えられ，これから，

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1, \ldots, s; \tag{8-43}$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \qquad \frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \qquad i = s+1, \ldots, n, \tag{8-44}$$

が導かれる．$n-s$ 個のイグノラブル(ignorable)な座標 $q_{s+1}, \ldots, q_n$ に対する方程式(8－44)は，RをハミルトニアンとするHamiltonの運動方程式の形をしており，一方，方程式(8－43)は s 個のイグノラブルでない座標が，RをラグランジアンとしたLagrange の方程式,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, s, \tag{8-45}$$

から求められることを示している！ ここまでの所では，座標 $q_{s+1}, \ldots, q_n$ がサ

*) ここで定義された関数Rは，普通引用される形の符号を変えたものである．このように定義したのは,(8－8)式のHの定義と形をそろえるためである.

イクリックであるという性質を，あからさまには使っていない．ところで，L の中にはいっていない座標は，ラウシアンの中にもはいってこない．そしてまた，サイクリック座標に共役な $n-s$ 個の運動量，$p_{s+1},\ldots,p_n$ は定数であるから，ラウシアンの中でそれらを定数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ で置き換えてよいであろう．ただし，$r=n-s$ である．これらの定数は初期条件によって定められるべきものである．このような修正をすれば，ラウシアンの中の変数は，s 個のサイクリックでない座標と，それらに対応する一般化速度だけになる．すなわち，

$$R = R(q_1,\ldots,q_s;\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s;\alpha_1,\ldots,\alpha_r;t) \qquad (8-46)$$

である．そうすると，サイクリックでない座標に対するLagrange 方程式(8－45)は，Hamilton 形式の場合と全く同じように，サイクリック座標の振舞いを考えに入れないで，解くことができる．このようにして，問題は実質的には s 個の自由度を持つ系のLagrange形式の問題に帰着された．そして，r 個のパラメーター α_j を除いて，他の自由度を"無視する"(ignore)ことができる．

Routh の方法が有効に適用される重要な例は，定常な運動からのずれと，そのようなずれの安定性の問題を調べる場合である．われわれはすでに，定常運動のいくつかの例について考察した．第3－6節では，いろいろな中心力に対して，力の中心のまわりに円軌道を描く質点の定常運動の安定性について調べた．p.353 第5－7節において議論された，重いこまの一様な歳差運動は定常運動であり，章動は，この定常運動からのずれとして現われたものであった．これらの例および他の例において，定常運動は，**サイクリックでない全ての座標が定数である，**ということによって特徴づけられる．例えば，中心力の問題では，2つの座標 r および θ があるが，円軌道はサイクリックでない座標だけが定数であることを意味している．再び重いこまについて言えば，(5－50)式のラグランジアンの中の3個のEuler の角 θ,ϕ,ψ のうち，サイクリックでない座標は θ だけであるが，一様な歳差運動ではそれは一定である．もし，ラグランジアンが時間を陽に含まない関数である場合に限ることにすれば，定常運動では**サイクリック座標は時間の1次関数である．**このことは，サイクリック，すなわち，イグノラブルな座標に対する運動方程式(8－44)からわかる．すなわち，

(8－46)式の形のラウシアンの場合には，これらの方程式は，イグノラブルな座標$\dot{q}_i$の一般化速度が，サイクリックでない変数を用いて，

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, \ldots, q_s; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_r), \quad i = s+1, \ldots, n, \tag{8－47}$$

の形の関係式によって与えられるということを意味している．定常運動に対しては，$q_1, \ldots, q_s$は定数であり，$\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s$は零であるから，サイクリック座標に対しては$\dot{q}_i$は一定となり，したがって，$q_i$は時間の1次関数として変化する．このようにして，円軌道の定常運動においては，サイクリック座標θは時間と共に一様に増加する．また，重いこまが一様に歳差運動をするときには，サイクリック座標の角速度，すなわち$\dot{\psi}$および$\dot{\phi}$は定数である．

s個の自由度をもつ"修正された"系に関する限り，問題は，第6章ですでに調べられ，つり合いの位置q_{0i}のまわりの振動の問題に帰着された．第6章におけるのと同様に，q_iに対応する一般化力は，つり合いの位置では零にならなければならない．このことは，

$$\frac{\partial R}{\partial q_{0i}} \equiv \left(\frac{\partial R}{\partial q_i}\right)_0 = 0, \qquad i = 1, \ldots, s, \tag{8－48}$$

が成立することを示している((6－1)式参照)．実際，第6章で用いられた多くの手順は，本質的な変更なしに，ここでも引き継ぐことができる．主なちがいは，定常運動を表わす座標がイグノラブルでないように，初めから特別な一般化座標を選ばなければならないということである．これらの座標は，Rが一般化速度の単純な2次関数ではなく，より複雑な形になっているようなものであるかも知れない．

平衡点のまわりの微小振動との類似点および相異点を見るために，その手順を少なくとも途中まで実行してみよう．この節では，以後和の規約は1からsまでの和に対して用いることにし，また(8－48)式によって示されるように，下付きの添字0は，定常運動に対する"つり合い"の位置における値と導関数の値とを示すことにする．第6章と同じように，新しい変数ρ_iはこのつり合いからのずれを示すものとする．すなわち，

$$q_i = q_{0i} + \rho_i, \qquad i = 1, \ldots, s \tag{8-49}$$
$$\dot{q}_i = \dot{\rho}_i,$$

p.354
とする．$\rho_i, \dot{\rho}_i$という量は，Rを定常運動の配置のまわりにTaylor 展開するとき，それらの2次の項までを残しておけばよいという意味で，微小量として扱われる．(8－48)式を考慮すると，その展開は次の形になる．

$$R = R_0 + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{0i}}\dot{\rho}_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial q_{0i}\partial q_{0j}}\rho_i\rho_j + \frac{\partial^2 R}{\partial q_{0i}\partial \dot{q}_{0j}}\rho_i\dot{\rho}_j$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial \dot{q}_{0i}\partial \dot{q}_{0j}}\dot{\rho}_i\dot{\rho}_j. \tag{8-50}$$

Rとそのすべての導関数は，サイクリックでない q_i's，それに対応する q_i's および定数だけの関数である．定常運動ではq_iは定数であり$\dot{q}_i$は零である．したがって，R_0および(8－50)式の全ての係数は時間的に一定であり，またR_0は付加定数だからRから落とすことができる．$\dot{\rho}_i$の1次の項は，自動的にLagrangeの運動方程式を満足する．なぜなら，$\dot{\rho}_i$の係数は時間的に一定であり，またρ_iを含まないからである．したがって，この項もRから落とすことができ，Rは次のように書き直すことができる．

$$R = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{\rho}_i\dot{\rho}_j + g_{ij}\rho_i\dot{\rho}_j - \frac{1}{2}c_{ij}\rho_i\rho_j. \tag{8-51}$$

行列要素a_{ij}およびc_{ij}は対称であるが，g_{ij}は必ずしもそうでないことに注意せよ．Rの中のρ_iと$\dot{\rho}_j$について双1次の項は，“ジャイロスコープ項”(gyroscopic terms)と呼ばれることがある．それは，これらの項がジャイロスコープの運動の問題にしばしば現われるからである．さて，このとき，変数ρ_iに対するLagrange の運動方程式は次の形をとる．

$$a_{ij}\ddot{\rho}_j - b_{ij}\dot{\rho}_j + c_{ij}\rho_j = 0. \tag{8-52}$$

ここで，

$$b_{ij} = g_{ij} - g_{ji},$$

である．第6章における運動方程式(6－8)と比較すると，a_{ij}がT_{ij}の役割をし，c_{ij}がV_{ij}に対応することがわかる(c_{ij}の符号はそのように選んだのである)．しかし$\dot{\rho}_i$の項には対応するものがない(これは，Rの中にはない散逸力に対応するものではない．特にジャイロスコピックな力は仕事をせず，Hの保存則を破らない)．Rの中の双1次の項は，第6章で行ったような配置空間における変換で，Rの全ての項を同時に対角化することを不可能にしている．したがって，その方法で規準振動を求めることはできない.* しかしながら，(6－9)式の形の振動的な指数関数の解を，ここでも探すことができる．すなわち，角振動数ωは永年方程式，

$$|\mathbf{c} + i\omega\mathbf{b} - \omega^2\mathbf{a}| = 0, \qquad (8-53)$$

の根である((6－11)式参照)．この方程式には，ωの1次の項が現われているが，$\mathbf{b}$の反対称性および他の行列の対称性から，永年方程式はω^2だけの関数であることを示すことができる†(このことは時間反転についての対称性という
p.355 物理的理由からも予想されることである)．もし(8－53)式の根が実数のωに対応するならば，定常運動からのずれは有界であって，安定であることができる．ωの値が虚数のときには，ρは時間と共に限りなく増加することができて，定常運動は不安定であることを示すことになる．

上に述べたことは，運動の安定性についての一般的な問題に関して，極めて単純化しすぎた描像を与えているということは認めなければならない．多くの面倒なことがある．そのうちの最も簡単なものとしては，(8－53)式に多重根や零の根があるときの運動の性質に関する問題がある．もっと深刻なことは，線形化された運動方程式(8－52)が，振幅が小さい場合でも，どの程度まで振動を表わすことができるかということや，非線形の場合の解の性質についての不確定さがあるということである．運動の安定性という一般的な問題は，今日

---

*) 対応するハミルトニアンは，位相空間における変換で対角化することができる．しかし，そのためには，次章で議論される正準変換の理論が必要である．J. L. Synge，Encyclopedia of Physics のVol. III/1，p. 192にある論文，および後の第9章の演習問題20を見よ．

†) K. R. Symon, *Mechanics*, 3d ed. (Reading, Massachusetts; Addison-Wesley, 1971). p. 483を見よ．

活発に研究が行われている分野であって，この書物の程度をはるかに越えるような，高度な数学的手法もしばしば用いられている．

1つの簡単な，ほとんど自明な例によって，Routhの方法と，その際でてくる量の物理的な意味を明らかにしよう．第3－6節で調べた場合，すなわち，ポテンシャル$V(r)$から導かれる中心力$f(r)$を受けて，1平面上を運動する1個の質点の場合を考えよう．そのとき，ラグランジアンは，

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r),$$

である．前に注意したように，イグノラブル座標はθである．また，それに共役な一定の運動量をlと書くことにすると，対応するラウシアンは，

$$R=\frac{l^2}{2mr^2}+V(r)-\frac{m}{2}\dot{r}^2,$$

となる．物理的には，ラウシアンは，等価な1次元ポテンシャル$V'(r)$から，動径方向の運動の運動エネルギーを**引いた**ものであることがわかる(負号が出てくるのは，(8－42)式で定義されるラウシアンが，等価な1次元問題のラグランジアンと反対の符号を持つからである)．定常運動では，サイクリックでない座標rは定数(r_0とする)であり，サイクリック座標θは時間と共に一様に増加する．すなわち，質点は，円軌道の上を一定の角速度で運動する．定常運動の条件は(8－48)式によって与えられるが，それは，ここでは$V'(r)$が$r=r_0$で極値をとるということと等価である．すなわち，

$$\frac{\partial R}{\partial r_0}\equiv\left.\frac{\partial V'(r)}{\partial r}\right|_{r=r_0}=-\frac{l^2}{mr_0^3}+\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0,$$

あるいは，

$$f(r_0)=-\frac{l^2}{mr_0^3},$$

p.356
である．これは(3－41)式である．定常状態のまわりにRをTaylor展開すると，線形化されたラウシアンとして，ここでは次の形が導かれる．

$$R=\frac{a_{11}\dot{\rho}^2}{2}-\frac{c_{11}\rho^2}{2}.$$

ここで，

$$a_{11}=\frac{\partial^2 R}{\partial \dot{r}_0^2}=-m, \qquad c_{11}=-\frac{\partial^2 R}{\partial r_0^2}=-\frac{3l^2}{mr_0^4}+\frac{\partial f}{\partial r_0},$$

である．永年行列方程式（8－53）は，１つの項だけになり，

$$c_{11}-\omega^2 a_{11}=0,$$

となる．したがって，運動が安定である条件，すなわち，ωが実数である条件は，$c_{11}/a_{11}>0$が成立することを要求するのと等価である．あるいは，定常運動であるための条件を用いると，これは，

$$\frac{\partial f}{\partial r_0}+\frac{3f(r_0)}{r_0}<0,$$

と等価である．これは（3－43）式であって，定常運動の安定性に対する判定条件である．

特徴的なことであるが，Routhの方法は，以前に第3－6節で示された解析に，物理的には何も付け加えるものではなく，解析の仕方を機械的にしたものである．多くの自由度をもつ複雑な問題に対しては，これはかなりな利点である．それゆえ，Routhの方法が最も有効であるのは，技術的応用に関連した問題を直接解くときであるのは驚くに当らない．しかし，基本的には，Routhの方法は，Lagrange的描像とHamilton的描像の両方の性質のいくつかを結合した不毛な雑種である．古典力学のいろいろな定式化を発展させるためには，完全なHamilton形式の方が実り多いのである．

8－4 相対論的力学のHamilton形式

特殊相対論におけるLagrangeの描像の場合と同じように，相対論的力学のHamilton形式に対しても２つの立場をとることができる．第１の立場は，共変的な記述にはこだわらず，ある特定のLorentz系，すなわち慣性系において議論しようというものである．時間は，ある特定のLorentz系で測られているので，他の座標と同じようには扱われず，非相対論的な力学の場合と同じように，系の時間的発展を記述するパラメーターとして用いられる．それでも，も

し，ハミルトニアンに導くラグランジアンそれ自身が，相対論的に不変な物理的理論，例えばMaxwellの理論やLorentz力に基づいたものであるならば，その結果得られるHamiltonの描像は相対論的に正しいのである．第2の立場は，Hamiltonの描像の，完全に共変的な記述を目指すものであるが，対応するLagrange形式で悩まされた困難(第7－9節参照)は，この場合には一層きびしくなる．われわれはまず，共変的でない方法を考察しよう．

1粒子のラグランジアンが(7－136)式の形，すなわち，

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - V,$$

の形である場合に対しては，すでにハミルトニアンは(エネルギー関数 h の形であるが)系の全エネルギーであることを示しておいた．すなわち，

$$H = T + V,$$

である．エネルギー T は，正準運動量 p_i((7－137)式)を用いて，(7－100)式によって，

$$T^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$$

と表わされるから，ハミルトニアンとしては，

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + V, \tag{8-54}$$

の形をとるのが適当である．

1個の粒子が電磁場の中を運動しているときには，系のラグランジアンは，

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} + q\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\beta} - q\phi,$$

で与えられた((7－141)式参照)．L の中の，速度について1次の項は，ハミルトニアンを作ると落ちてしまうが，一方第1項は，ハミルトニアンの中に T としてでてくる．このようにして，ハミルトニアンは再び粒子の全エネルギーとなり，

$$H = T + q\phi, \tag{8-55}$$

となる．この系に対しては，粒子の直交座標に共役な正準運動量は，

$$p_i = mu_i + \frac{q}{c}A_i,$$

によって定義される（(7－142)式参照)．したがって，Tとp_iとの関係は，(7－168)式で与えられ，ハミルトニアンの最終的な形は次のようになる．

$$H = \sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 c^2 + m^2c^4} + q\phi. \tag{8-56}$$

再び，ここでの$\mathbf{p}$は粒子の**直交**座標系での位置座標に共役な運動量であるということを強調しておかなければならない．また，iH/cが，世界ベクトル

$$mu_\nu + \frac{q}{c}A_\nu$$

の第4成分であることも注意しておこう((7－74),(7－96)および(7－166)式参照)．(8－56)式のハミルトニアンは，共変的な形には表わされていないが，あるLorentz系では世界ベクトルの第4成分になっているということから，Lorentz変換の下では定まった変換性を持っている．

p.358

Hamilton形式への共変的なアプローチにおいては，時間は空間座標と同じように扱わなければならない．すなわち，時間は対応する共役運動量をもつ正準座標の1つとして考えなければならない．このような位相空間の次元の拡張の基礎づけは，実際には非相対論的な力学においても行うことができる．第7－9節のやり方に従えば，位相空間における系の代表点のその軌道に沿った運動は，あるパラメーターθによって印しをつけることができる．そうすると，言わば“解放された” t は，もう1つの座標として用いられるのである．θに関する導関数を上つきのプライムで表わすことにすれば，配置空間$(q_1,\ldots,q_n;t)$におけるラグランジアンは，

$$\Lambda(q,q',t,t') = t'L\left(q,\frac{q'}{t'},t\right), \tag{8-57}$$

となる((7－159)式参照)．このときには，tに共役な運動量は，

$$p_t = \frac{\partial \Lambda}{\partial t'} = L + t'\frac{\partial L}{\partial t'},$$

である．$\dot{q} = q'/t'$という関係を用いると，上の関係式は次のようになる．

$$p_t = L - \frac{q_i'}{t'}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = L - \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -H. \qquad (8-58)$$

したがって，時間"座標"に共役な運動量は，通常のハミルトニアンに負号をつけたものである[*]．この導出に用いられた枠組は，全く非相対論的なものであるが，その結果は4元運動量ベクトルの時間成分をiE/cと同一視することと合致している．定義の式(8－2)からわかるように，もしqに定数αを掛ければ，共役運動量はαで割られることになる．したがって，ictに共役な正準運動量はiH/cである．

このようにして，相対論的に共変なハミルトニアンを作るのに用いられる，自然な道筋が得られたように見える．しかしながら，この道には落し穴が堀られているのである．この過程の出発点にとられたラグランジアン(7－159)式または(8－57)式は，一般化速度q'について1次同次式である．そして，このようなラグランジアンに対しては，上に述べたハミルトニアン形式を構成する処方(511ページ参照)は，破綻をきたして修復することができないのである．もし，LがL_1型であれば，対応するハミルトニアン(それを$\mathbb{H}(q, t, p, p_t)$と書くとする)は恒等的に零である！しかしながら，このハミルトニアンを作るよりも前の段階においてすでに，一般化速度を(q_i, p_i)の関数として求めるために，(8－2)の連立方程式を逆に解くという段階4において破綻が生じる．L_1
p.359
型のラグランジアンに対しては，逆に解くということが実行できない．このことは，Lが$\dot{q}_i$について単に線形であることによって，1次同次式である場合に，最も直接的に見ることができる．その場合には，p_iは全ての$\dot{q}_j$に依存しなくなり，$\dot{q}_j$をp_iを用いて表わす方法はない．ラグランジアンがもっと一般的な様式でL_1型である場合には，逆に解くことが不可能であることの証明はも

*) 他の残りの運動量は，tからθへの変換で不変である．このことは，対応する導関数を計算してみればわかる．すなわち，

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q_i'} = t'\frac{\partial L}{\partial q_i'} = t'\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{1}{t'}\right) = p_i.$$

っと複雑になる．一般的な陰関数の定理から，n個の変数y_iがn個の変数x_jの関数として，

$$y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n),$$

の形に与えられたとき，x_jがy_iの関数として逆に解けるための必要十分条件は，行列要素が，

$$M_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \tag{8-59}$$

で与えられるJacobi行列**M**の行列式が零にならないことであることを思い出そう.* このことを(8−2)式に適用すると，それらが逆に解けるのは，行列式

$$|\mathbf{W}| = \left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right|,$$

が零にならない場合に限られることがわかる．さて，LがL_1型であるならば，

$$\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = L,$$

である．これを$\dot{q}_j$で微分すると，次の条件が得られる．

$$\dot{q}_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = 0. \tag{8-60}$$

行列記法で書けば，

$$\dot{\mathbf{q}}\mathbf{W} = 0, \tag{8-60'}$$

となる.(8−60)式は，行列式の1つの列が他の列によって表わされるということを述べていると解釈することができる．そうすると，行列式は零になる．別の見方をすると，(8−60′)式は**W**の固有値は零だけであることを述べていると見ることもできる．このこともまた行列式が零であることを意味している．もちろん，Jacobiの行列式が零になるということは，全ての運動量が独立では

---

*) 陰関数の定理は，高等数学の多くの書物で議論されている．例えば，S. Lang, *A Second Course in Calculus*, 2nd. ed., 1968, p. 529 を参照せよ．特に注意深い証明が，E. Hille, *Analysis*, Vol. 2, 1966, p. 367 に与えられている．

ないということを意味している．位相空間が，t および p_t を含むように拡張された一般的な定式化の場合には，(8－58)式を，

$$p_t = -H(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n; t) \ ,$$

の形に書いたものは，p_t が独立ではなく，他のすべての座標や運動量によって与えられるということをはっきりと示している．相対論においては，例えば自
p.360 由粒子の場合には，運動量に対するこの拘束は，物理的には4元ベクトル p_μ が一定の大きさを持っている，ということに対応するということはすでに見た通りである．

したがって，$\dot{q}_i$ について1次同次式であるラグランジアンに対しては，ハミルトニアンを作る通常の手続きは役に立たないと結論しなければならない．"同次問題"(homogeneous problem)において，ハミルトニアンを定式化する通常の手続きに代わる多くの方法が工夫されている*．すべての方法は，Jacobiの行列式が零になるという意味の拘束を明らかに考慮に入れているが，それらはすべて複雑であって，標準的な手法として受け入れられるには至っていない．同次の"逆に解くことのできない"ラグランジアンは，出来れば避けるべき災難というべきである．

幸いなことに，少なくとも古典論における相対論的力学においては，共変的なラグランジアンが1次同次関数でなければならないという強力な理由は何もないように思われる．すでに見たように，1個の自由粒子に対しては，共変的なラグランジアン，

---

*) "同次問題"を多少とも物理学者の立場から扱った文献は非常に多いので，ここでは，ほんの2，3のものを挙げるにとどめる．Lanczosの *The Variational Principles of Mechanics*, 4th ed., 1970, p. 187には，全ての中で最も簡単な説明が与えられている．Diracは1933年にはじまる多くの論文で，独特な方法を展開した．それらは小冊子，*Lectures on Quantum Mechanics*, 1964にまとめられている．この問題を取り扱う更に別の方法については，H. Rundの *The Hamilton–Jacobi Theory in the Calculus of Variations*, 1966の第3章を見よ．

Legendre変換は，逆変換ができることを注意しておいた方が良いであろう．すなわち，ハミルトニアンが与えられると，対応するラグランジアンを求めることができる(演習問題1参照)．しかし，困難はどちらの場合にも現われる．すなわち，もし与えられたハミルトニアンが，運動量に関して1次同次式であることを要請すると，それに等価なラグランジアンを見出すことはできないのである．

$$\Lambda(x_\mu, u_\mu) = \frac{1}{2} m u_\mu u_\mu ,$$

から，正しい運動方程式が導かれる．もちろん，4元速度の成分 u_μ はすべてが独立ではないが，その拘束条件は，すべての微分を行った後に課されるべき“弱い条件”として扱うことができる[†] このラグランジアンから，非相対論的力学の場合と同じ筋道を通って，ハミルトニアンを求めることは困難なことではない．結果は，明らかに次のようになる．

$$\mathbb{H} = \frac{p_\mu p_\mu}{2m}. \qquad (8-61)$$

電磁場の中を運動する1個の粒子に対しては，共変的なラグランジアンは，以前に求めたように，

$$\Lambda(x_\mu, u_\mu) = \frac{1}{2} m u_\mu u_\mu + \frac{q}{c} u_\mu A_\mu(x_\lambda), \qquad (7-165)$$

であって，正準運動量は，

$$p_\mu = m u_\mu + \frac{q}{c} A_\mu , \qquad (7-166)$$

p.361
である．対応するハミルトニアンにおいては，通常のように u_μ について1次の項は消えて，また残りの L_2 の部分は，正準運動量を用いると次のようになる．

$$\mathbb{H} = \frac{\left(p_\mu - \frac{q}{c} A_\mu\right)\left(p_\mu - \frac{q}{c} A_\mu\right)}{2m}. \qquad (8-62)$$

(8−61)および(8−62)式のハミルトニアンは，両方共一定であって，同じ値 $-mc^2/2$ を持っている．しかし，運動方程式を求めるために重要なのは，その位置と運動量の4元ベクトルに対する**関数関係**である．1個の粒子から成る系の場合には，共変的なハミルトニアンは，8個の1階の運動方程式，

$$\frac{dx_\nu}{d\tau} = \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial p_\nu}, \qquad \frac{dp_\nu}{d\tau} = -\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x_\nu} \qquad (8-63)$$

に導く．われわれは，これらの方程式のすべてが独立ではあり得ないというこ

†) このような拘束条件の分類については，Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* を見よ．

とを知っている．(8−63)式の空間部分は，明らかに空間的な運動に対する方程式を与える．したがって，残りの2つの方程式は，Lagrange形式の場合と全く同様に，何も新しい情報を与えないであろうと予想される．このことは，$\nu=4$ に対する方程式を，ある特定のLorentz系で調べてみることによって証明される．そのうちの1つは，p_4 を作るための方程式である．すなわち，

$$u_4=\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial p_4}=\frac{1}{m}\left(p_4-\frac{q}{c}A_4\right),$$

あるいは，

$$p_4=\frac{i}{c}(T+q\phi)=\frac{iH}{c},$$

である．これは前に述べた一般的な結論に一致する．他のものは次のように書くことができる．

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dp_4}{dt}=-\frac{1}{ic}\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t}.$$

あるいは，

$$\frac{dH}{dt}=\sqrt{1-\beta^2}\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t}.$$

(8−62)式と(8−56)式の H の形を比較すると，

$$\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t}=\frac{T}{mc^2}\frac{\partial H}{\partial t},$$

であることが示される．したがって，運動方程式は，

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t},$$

の形に変形されるが，これはすでに(8−35)式に表わされている一般的な結果にほかならない．

p. 362
共変的なLagrange形式の場合と同じく，電磁気的な力以外の力を記述するためには，ラグランジアンの中に用いるのに適当な共変的ポテンシャルを見出さなければならない．そして，多粒子系の場合には，場との相互作用以外の相互作用を含ませるときには，決定的な困難と全面的に対決しなければならない．

Hamilton 形式の言葉では，すでに引用した“無相互作用”の定理は，次のように述べることができる．すなわち，粒子間に直接の相互作用がない場合にのみ，Lorentz 不変な系は，通常の位置座標とそれに対応する正準運動量とを用いて記述することができる．したがって，相対論的な Hamilton 形式が有効な範囲は，大幅に制限されることになる．それで，以後は大部分を非相対論的な力学に限ることにしよう．

8−5 Hamilton の方程式を変分原理から導くこと

Lagrange の方程式が1つの変分原理，すなわち第2−1節の Hamilton の原理から導かれることはすでに示した．実際，変分の方法が，Lagrange の方程式を導くのに好ましい方法である場合がしばしばあることがわかる．というのは，変分原理は，通常，力学の範囲に含まれないようないろいろな物理系に対しても適用することができるからである．もし，直接 Hamilton の運動方程式に導くような変分原理を見つけることができるなら，同じように有益であろう．Hamilton の原理，

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0, \tag{8-64}$$

はこの目的にかなっているが，初めに定式化された通り，それは配置空間における道筋に関するものである．したがって，まず修正すべきことは，積分を位相空間における系の代表点の軌道にわたって行うようにし，また変化された道筋がこの位相空間の軌道の近傍にあるようにすることである．Hamilton 形式の精神に従って，q と p とは両方共，位相空間の独立座標として取り扱い，独立に変化させなければならない．そのために，作用積分の式(8−64)の被積分関数は，(8−8)式によって，q, p およびそれらの時間についての導関数の関数として表わさなければならない．そうすると(8−64)式は，

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)\right) dt = 0, \tag{8-65}$$

の形になる．位相空間における変分原理として，(8−65)式は，**修正された Hamiltonの原理**(*modified Hamilton's principle*)と言われることがある．

それは変換理論（第９章参照）に関連して最もしばしば用いられるのであるが，ここでの主な興味は，この原理から，Hamiltonの正準運動方程式が導かれることを示すことである．

修正されたHamiltonの原理は，第２－３節で考察された$2n$次元空間における変分問題（（２－14）式参照）と全く同じ形をしている．すなわち，

$$\delta I=\delta\int_{t_1}^{t_2}f(q,\dot{q},p,\dot{p},t)\,dt=0, \qquad (8-66)$$

p.363
の形である．これに対する$2n$個のEuler-Lagrangeの方程式は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial f}{\partial q_j}=0, \qquad j=1,\ldots,n, \qquad (8-67)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j}\right)-\frac{\partial f}{\partial p_j}=0, \qquad j=1,\ldots,n, \qquad (8-68)$$

となる．（８－65）式で与えられるような被積分関数fの場合には，$\dot{q}_j$は$p_i\dot{q}_i$の項にのみ含まれ，q_jはHにのみ含まれている．したがって，（８－67）式から，

$$\dot{p}_j+\frac{\partial H}{\partial q_j}=0, \qquad (8-69)$$

が導かれる．他方，（８－65）式の被積分関数の中には$\dot{p}_j$は陽には全く含まれていない．したがって，（８－68）式は単に，

$$\dot{q}_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}=0, \qquad (8-70)$$

になる．方程式（８－69）および（８－70）はまさにHamiltonの運動方程式，（８－12）式，である．このように，修正されたHamiltonの原理から得られるEuler-Lagrangeの方程式は，求める正準方程式である．

変分原理からHamiltonの方程式を導くこのやり方は，非常に簡単で，一見手品のように思われるかも知れない．手品師の口上に注意をそらされている間に，なにかが忍び込まされたのではないかと思うかも知れない．修正されたHamiltonの原理は，もとのHamiltonの原理と等価なものであろうか．それとも物理的になにか他のものを含んでいるのであろうか？このような疑問はほとんど問題にならない．それは，修正されたHamiltonの原理を正当化する主

要な点は，その原理から位相空間における正準方程式が導かれる，ということにあるからである．Hamilton の原理の有効性についても，それが Lagrange の運動方程式に対応しているということ以上には，結局のところ議論はされなかったのである．ハミルトニアンを作り得る限り，Legendre 変換の処方は，Lagrange 形式とHamilton 形式とが，したがってまたそれぞれに対応する変分原理が，同じ物理的内容を持っているということを示している．

しかしながら，1つの疑問を出すことができる．すなわち，この導出の際に，軌道の変分に対して，もとの Hamilton の原理の場合にはなかった制限がつけられるのではないかということである．第2－2節で述べたように，Euler-Lagrange の方程式に導く変分原理は，独立変数の変分は両端点では零になるように定式化されている．したがって，位相空間では，両端点で $\delta q_i = 0$ **かつ** $\delta p_i = 0$ であることを要求することになるが，Hamilton の原理では $\delta q_i = 0$ だけが要求されることになる．しかしながら，第2－2節で詳しく示された導出の仕方を見ると，端点での変分が零になることが要求されるのは，独立変数の時間に関する導関数の変分から出てくる，積分された項を除くためだけであることがわかるであろう．ところが，修正されたHamiltonの原理(8－65)式に対応する(8－66)式の関数 f は，確かに $\dot{q}_i$ の関数ではあるが，$\dot{p}_j$を陽に含p.364んではいない．したがって，(8－68)式，それゆえ(8－70)式は，端点における p_j の変分を規定しなくても(8－65)式から導かれるのである．このようにして，修正された Hamilton の原理は，(8－8)式によってハミルトニアンを用いて定義された被積分関数 L を使えば，Hamilton の原理の場合と同じ変分の条件の下で，Hamilton の方程式に導くのである*．

---

*) 定義の式(8－2)は，p を q および $\dot{q}$ と関係づけているので，q と p とは独立に変えることはできないという反論があるであろう．このときには，q(および $\dot{q}$)の変分は，対応する p の変分なしには行えない．この反論に答えようとする次のような試みもなされている．すなわち，(8－2)式の中の $\dot{q}_j$ を新しい独立変数，例えば r_j に置き換え，q と r を修正されたHamiltonの原理の独立変数にとって，p はそれから導かれた関数とするのである．こうして得られる運動方程式は，$r_j = \dot{q}_j$ という拘束条件の下ではHamiltonの運動方程式になる！（D. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics*, 1961, p. 100 参照）．しかし，このような手続きは必要ではない．実際，この反論は，Hamiltonの描像の意図と精神に全く反するものである．一度Hamilton形式をとることにすれば，(8－2)式はその理論形式の中では**なんの役割も演じない**のである．運動量は，座標と同じ基礎づけをもつ独立変数に格上げされ，**運動方程式それ自身を媒介としてはじめて，**座標や時間と関係づけられるのであって，初めから定義の式によって関係づけられているのではない．

それにもかかわらず，修正されたHamilton の原理において，変形された道筋が，端点では q ， p 共に元に戻るということを要求することには利点がある．というのは，そのときにはHamilton の運動方程式を得るための条件が，より一般的になるからである．Hamiltonの原理の場合と同様に，もし端点で変分が零であれば，任意の（２回微分可能な）関数 $F(q,p,t)$ の時間に関する全導関数を被積分関数に付け加えても変分原理の有効性には影響がない．例えば，（8－65）式の被積分関数から，

$$\frac{d}{dt}(q_i p_i)$$

という量を引いたとしよう．そのときには，修正されたHamilton の原理は，

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(-\dot{p}_i q_i - H(q,p,t)\right)dt = 0, \qquad (8-71)$$

のように表わされる．この場合には，（8－66）式の被積分関数 f は $\dot{p}$ の関数になっているが，この f を用いた場合のEuler-Lagrangeの方程式（8－67）および（8－68）ば，再び Hamilton の運動方程式（8－12）に一致することは容易に示すことができる．しかしながら，（8－71）式の被積分関数は，ラグランジアンではなく，また一般には，配置空間における点変換によってラグランジアンと簡単に関係づけることもできないものである．端点での q および p の変分を共に零に制限することによって，修正されたHamilton の原理は，それに先立つ Lagrange形式がなくても，Hamiltonの運動方程式を作り上げるための，独立で一般的な方法を与えるのである．さらに，もしそうしたいならHamilton形式の正準変数と，Lagrange形式の一般化座標および一般化速度との関連も，必ずしもつけなくてよい．このことは，次の章でHamiltonの運動方程式の形を保つような，位相空間における変数変関を調べるときに重要になる．

p と q の変分が独立であるという要求は，上の導き方では極めて本質的なも
p.365
のであったが，このことは，Lagrange 形式と Hamilton 形式の基本的な相異を明らかに示している．座標 q_i と運動量 p_i のうち，いずれか一方がより基本的な独立変数の組であると考えるべきではない．両方共，同じ資格で独立なのである．独立変数の個数を n 個から $2n$ 個にふやすことによって初めて，１階の運

動方程式を得ることができるようになるのである．ある意味では，“座標”および“運動量”という名前は適当なものではなかった．なぜなら，この言葉は空間的な座標および線運動量，あるいはせいぜい角運動量を想像させるからである．座標および運動量という言葉には，今ではもっと広い意味を与えなければならない．独立変数を，座標と運動量に分けるということは，単に運動を記述する独立変数を，Hamiltonの運動方程式を通して，殆ど対称な関係にある2つのグループに分けることに対応しているに過ぎないのである．

8－6　最小作用の原理

Hamilton形式に関係のあるもう1つの変分原理に，**最小作用の原理**（*principle of least action*）として知られているものがある．それには，新しい型の変分がでてくる．その変分をΔ-変分（Δ- variation）と呼ぶことにするが，それについては詳しい説明が必要である．第2章において，Hamiltonの原理を議論する際に用いられたδ-変分の場合には，配置空間における変化された道筋は，正しい道筋の端点のもつ時刻と同じ時刻t_1およびt_2における系の配置を表わす端点で常に終っていた．さらに，Lagrangeの運動方程式を得るためには，変化された道筋は配置空間において，正しい道筋の端点と同じ端点に戻るということ，すなわち，$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$であることが要求された．これに対して，$\Delta$-変分の方はもっと条件がゆるい．すなわち，一般にその道筋にわたって積分が行われる変化された道筋は，正しい道筋とは異なった時刻で終っていてもよく，また端点での座標の変分が零でなくてもよい．しかしながら，変化された道筋に対するパラメーターとしては，δ-変分におけるものと同じものを用いることができる．第2－3節の記号を使うと，変化された道筋の族として可能なものは，関数，

$$q_i(t,\alpha) = q_i(t,0) + \alpha\eta_i(t), \tag{8－72}$$

によって定義されるものである．ここでαは，無限小のパラメーターで，正しい道筋に対しては零になる．Δ-変分においては，関数η_iは，元の道筋に対しても変化された道筋に対しても，必ずしも端点で零にならなくてもよい．要求さ

れることは，それらが連続かつ微分可能であるということだけである．図8－2に，配置空間におけるΔ-変分に対する正しい道筋および変化された道筋が示されている．

作用積分のΔ-変分を計算しよう．

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt \equiv \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} L(\alpha)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L(0)\,dt. \qquad (8-73)$$

ここで$L(\alpha)$は変化された道筋に沿って積分することを意味し，$L(0)$はそれに対応する実際の運動の道筋を表わしている．変分は，明らかに2つの部分からできている．その1つは積分限界が変化することからくるものである．この部分は，無限小の1次のオーダーまででは，実際の道筋の上での被積分関数の値と，積分限界の時間の差との積である．第2の部分は，変化された道筋の上での，被積分関数の変化によるものであるが，このときには積分限界は元の積分と同

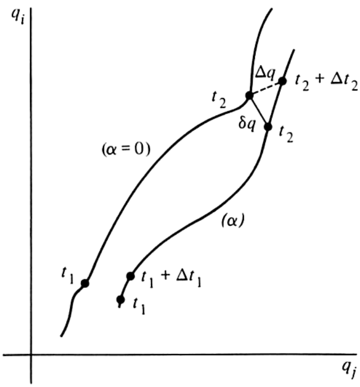


図8－2
配置空間におけるΔ-変分を示す図．

p.366
じものである．したがって，作用積分のΔ-変分を次のように書くことができる．

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = L(t_2)\,\Delta t_2 - L(t_1)\,\Delta t_1 + \int_{t_1}^{t_2} \delta L\,dt. \qquad (8-74)$$

ここで，第2の積分の変分は変化された道筋のパラメーター表示を用いて，q_iの変分が両端点で零にならないということを除いては，Hamilton の原理の場

合と同様に行うことができる．部分積分から生じる端点からの寄与は残しておかなければならないから，右辺の積分の項は，

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i\,dt+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\bigg|_1^2,$$

となる．Lagrangeの方程式によって，角括弧の中は零となるから，結局Δ-変分は，

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=(L\Delta t+p_i\,\delta q_i)\bigg|_1^2, \qquad (8-75)$$

の形をとる．(8－75)式において，δq_iは元の端点の，時刻t_1およびt_2におけるq_iの変分を表わしている．さて，Δ-変分を，実際の道筋の端点でのq_iと，端点の時刻の変化をも含むように，変化された道筋の端点でのq_iとの差 Δq_i を用いて表わすことにしよう．図8－2から明らかなように，これら2つの変分は，

$$\Delta q_i=\delta q_i+\dot{q}_i\,\Delta t, \qquad (8-76)$$

p.367
という関係で結びつけられている*．したがって，(8－75)式は，

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=(L\Delta t-p_i\dot{q}_i\,\Delta t+p_i\,\Delta q_i)\bigg|_1^2,$$

あるいは，

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=(p_i\,\Delta q_i-H\,\Delta t)\bigg|_1^2, \qquad (8-77)$$

のように書き直すことができる．

最小作用の原理を得るために，今後の考察は，次の3つの重要な条件が満たされる場合に限定しよう．

1.　L，したがってHが時間の陽な関数ではないような系だけを考える．し

---

*) (8－76)式は，変化された道筋をパラメーターを用いて表わした形，(8－72)式から形式的に導くこともできる．すなわち，上の端点では，

$$\Delta q_i(2)=q_i(t_2+\Delta t_2,\alpha)-q_i(t_2,0)=q_i(t_2+\Delta t_2,0)-q_i(t_2,0)+\alpha\eta_i(t+\Delta t_2),$$

となるが，微小量αとΔt_2とについて1次の項までとると，

$$\Delta q_i(2)=\dot{q}_i(2)\,\Delta t_2+\delta q_i(2),$$

となる．これは(8－76)式が述べていることである．

たがって，Hは保存される．

2. 変分は，Hが，実際の道筋の上だけではなく，変化された道筋の上でも保存されるようなものとする．

3. さらに，変化された道筋は，端点ではΔq_iが零となるものに制限する（しかしこの制限はΔtには付けない）．

このような制限を付けられた変分の性質は，変化された道筋が，配置空間において実際の道筋と同じ曲線をそのまま描くことができるということに注意することによって，示されるであろう．違っているところは，系を表わす点がこの曲線上を動く速さである．すなわち，$q_i(t)$は，変化された道筋では実際の道筋のものとは変わったものになっている．このときには，変化された道筋のすべての点でハミルトニアンが同じ値を保つためには，２つの端点を通る時刻が変えられなければならない．これら３つの条件が満たされると，作用積分のΔ-変分（8－77）式は，次のようになる．

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = -H(\Delta t_2 - \Delta t_1). \qquad (8-78)$$

しかし，同じ条件の下で，作用積分そのものは，

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i\dot{q}_i\,dt - H(t_2 - t_1),$$

p. 368
となり，このΔ-変分は，

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \Delta\int_{t_1}^{t_2} p_i\dot{q}_i\,dt - H(\Delta t_2 - \Delta t_1), \qquad (8-79)$$

となる．（8－78）式と（8－79）式とを比較すると，最後に**最小作用の原理**が得られる*．

---

*）（8－80）式の積分は，古い文献では通常，作用または作用積分といわれていた．それで本書の初版では，その習慣に従った．最近では，Hamiltonの原理にでてくる積分を作用と呼ぶ方がより習慣的になってきたので，この版ではその使用法を受け入れることにした．LandauとLifshitz（*Mechanics*, 1960, p. 141）の例にならって，（8－80）式の積分を，**短縮された作用**（*abbreviated action*）と呼ぶことにしよう．

最小作用の原理は，通常Maupertuisの名前と結びつけられる．著者によっては，このときの積分を**Maupertuisの作用**（*Maupertuis action*）と呼んでいる．しかしながら，1744年にMaupertuis が初めて述べた元々の命題は，その意図が漠然として目的論的であって，今日の規準から見ると合格とは言い難い．この原理の客観的な述べ方は，Euler およびLagrangeによって

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} p_i\dot{q}_i\,dt = 0. \qquad (8-80)$$

次のことに注意しておこう．すなわち，修正されたHamiltonの原理は，表面的には(8－80)式に似た形に書くことができるのである．第7－9節および第8－4節のように，系を表わす点の軌道を，パラメーターθを用いて記述すれば，修正されたHamiltonの原理は，

$$\delta\int_{\theta_1}^{\theta_2} (p_i\dot{q}_i - H)t'\,d\theta = 0, \qquad (8-81)$$

となる．tからθへの変換で，運動量p_iは変化せず，また$\dot{q}_i t' = q_i'$であることを思い出そう(531ページの脚注参照)．さらに，tに共役な運動量は$-H$である．したがって，(8－81)式は，

$$\delta\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sum_{i=1}^{n+1} p_i q_i'\,d\theta = 0, \qquad (8-82)$$

のように書き直すことができる．ここで，tをq_{n+1}と記した．しかしながら，(8－82)式と最小作用の原理とを混同してはならない．(8－82)式は$i = n + 1$までの和であることが陽に示されているように，$(2n + 2)$次元の位相空間に関するものであるが，他方(8－80)式は通常の配置空間についてのものである．しかし，最も重要なことは，最小作用の原理はHを一定とするΔ-変分を用いているのに対して，(8－82)式ではδ-変分を用いており，Hは原理的には，時間の関数であり得るということである．(8－82)式は修正されたHamiltonの原理にほかならず，ハミルトニアンが現われていないのは，“同次問題”に対しては，ハミルトニアンは恒等的に零となるという現象を反映しているにすぎない．

p. 369
最小作用の原理そのものは，いろいろの形に表わすことができる．非相対論的力学においては，一般化座標を定義する式が，時間を陽に含まなければ，運動エネルギーは$\dot{q}_i$の2次関数となる((1－71)式参照)．すなわち，

与えられた．もちろん，この法則の名前は，むしろ**定常作用の原理**(*the principle of stationary action*)というべきものであるが，歴史的な名前が文献において大変深く浸みついているので，今では変えられなくなっている．短縮された作用が，実際に最小になるような場合については，E. T. Whittaker, *A Treatise on Analytical Dynamics*, 4th ed., 1936, p. 250を見よ．

$$T = \frac{1}{2} M_{jk}(q)\dot{q}_j \dot{q}_k, \qquad (8-83)$$

である．さらに，ポテンシャルが速度に依存しなければ，正準運動量は T だけから導かれて，その結果，

$$p_i \dot{q}_i = 2T,$$

となる．したがって，このような系に対しては，最小作用の原理は，

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T\,dt = 0, \qquad (8-84)$$

と書くことができる．さらに，系に外力が作用しない場合には，例えば，正味の外力がない剛体のような場合には，T は全エネルギー H と共に保存される．このときには，最小作用の原理は，

$$\Delta(t_2 - t_1) = 0, \qquad (8-85)$$

という特別な形になる．(8－85)式は，エネルギーの保存と矛盾しないような，2点間のすべての可能な道筋のうち，系は2点間の移動時間が最小(より正確には極値)となるような，特定の道筋に沿って運動する，ということを述べている．最小作用の原理のこの形は，光線が2点間を進むときには，所要時間が最小になるような道筋に沿って進む，という幾何光学における Fermat の原理を思い出させる．第10章で，Hamilton 形式と幾何光学との関係を論ずるときに，これらの考察に戻ってくる機会があるであろう．

第6章で，微小振動に関連して，曲がった配置空間(curvilinear configuration space)という概念を導入した(327ページ参照)．その場合には，行列 **T** の要素が計量テンソルを構成していた．そのような配置空間は，$2T$ が系を表わす点の速度ベクトルの大きさの2乗になるという性質を持っている．いまの場合でも，T が(8－83)式の形であるときにはいつでも，全く同じようなことをすることができる*．したがって，M_{jk} という係数が計量テンソルを作って

*) **T** の要素は，つり合いの位置からの変位 η_i にはよらなかった．ここでの要素 M_{jk} は，一般には q の関数である．しかし，この違いは定式化には全く影響しない．

いるような，配置空間を構成することができる．一般には，そのような空間は曲線座標をもっており，直交座標系をもつ空間ではないであろう．このとき，この配置空間における線素の長さの2乗は，

$$(d\rho)^2 = M_{jk}\,dq_j\,dq_k, \qquad (8-86)$$

p.370 によって定義される（(6－24)式参照）．したがって，運動エネルギーは，

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2, \qquad (8-87)$$

の形になる．あるいは，これと等価であるが，

$$dt = \frac{d\rho}{\sqrt{2T}}\ , \qquad (8-88)$$

が成立する．(8－88)式を用いると，短縮された作用積分における積分変数を t から ρ に変換することができて，最小作用の原理は，

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} T\,dt = 0 = \Delta\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{\frac{T}{2}}\,d\rho,$$

あるいは，最終的に，

$$\Delta\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{H - V(q)}\,d\rho = 0, \qquad (8-89)$$

となる．(8－89)式は，しばしば**Jacobiの形の最小作用の原理**（*Jacobi's form of the least action principle*）といわれる．それは今や，M_{jk}を要素に持つ計量テンソルによって特徴づけられる，特別な曲がった配置空間における系を表わす点のたどる道筋に関するものである，この配置空間では，系を表わす点は，その道筋を速さ$\sqrt{2T}$で動く．もし，その物体に力が作用しなければ，Tは一定となり，Jacobiの原理は，系を表わす点が配置空間における最も短かい道に沿って進む，ということを述べていることになる．同じことであるが，系の運動は，系を表わす点が配置空間における測地線に沿って進むようなものである，といってもよい．

Jacobiの形の最小作用の原理は，系を表わす点の**時間的な**運動よりも，むしろその**道筋**に関するものである，ということを強調しておくべきであろう．

（8－89）式は，線素の長さ$d\rho$について述べている．Hは一定であり，Vはq_iのみに依存しているから，時間はどこにも現われない．実際，Jacobiの形のこの原理を用いると，Lagrangeの方程式を導いた場合と幾分似た処方によって，道筋に対する微分方程式を得ることができる．Fermatの原理という形で，Jacobiの形の最小作用の原理は，幾何光学や電子光学において，多くの実り多い応用がなされている．ここでは，本題から離れすぎるので，これ以上詳しいことには立ち入らない．

古典力学に対しては，多数の似たような変分原理が他にも当惑するほどある．それらの中から1つの例を挙げれば，最小作用の原理から直ちに，外力を受けない粒子は，曲率が最小の道筋を進むという，**Hertzの最小曲率の原理**（*Hertz's principle of least curvature*）が導かれる．Jacobiの原理によれば，そのような道筋は測地線でなければならないが，曲率が最小になるという幾何学的性質は，測地線の良く知られた特徴の1つである．すでに指摘したように，変分原理そのものには，物理的に新しい内容は何も含まれておらず，また，与えられた力学の問題の実際的な解法を簡単化することもほとんどない．その主要な価値は，古典力学の理論的構造を，新しい形に定式化するときの出発点となることである．この目的にとっては，Hamiltonの原理は特に実り多いもの
p. 371
である．また，それほどではないが，最小作用の原理も役に立っている．その他の原理は，それらが実りのない目的論的な推論に導いた以外には，ほとんど役に立たないことがわかった．それで，それらについてここで論じることは無意味であるように思われる．

参　考　書

P. H. BADGER, *Equilibrium Thermodynamics.*　熱力学の教科書の多くは，Legendre変換の熱力学ポテンシャルへの応用について述べている．この参考書の第10章には，特別に長くて具体的な取り扱いがなされている．

R. COURANT AND D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics.*　すでに述べたように，Legendre変換には，偏微分方程式の理論に対する形式的な数学的応用がある．Courantは，この書物の第Ⅱ巻で，Legendre変換のこの側面，および幾何学的意味について，読み易い議論を与えている（第1章，第6節）．

E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics.* 古典力学にでてくる変分原理という主題は，非常に複雑になる場合があり，また一見なんの関係もないように見える領域に，多くの深い根をもっている．例えば，Hamiltonの原理と2階の偏微分方程式の一般論との間には，密接な関係がある．これらのトピックスのいくつかは，われわれの書物の以下の章で論ずるつもりであるが，しかしその他の多くのものは，本書で意図している取り扱いには適していない．同じように，われわれは，Hamiltonの原理における極値が，極小であるか極大であるか，というような問題も，ここでは取り上げることができないし，また，いろいろな形の変分原理についての考察も行わないであろう(また，そういう考察をするのが望ましいわけでもないであろう)．このような性質の問題に関心を持つ学生のためには，非常に多くの文献がある．実際それは，**"あり余って困る"**(*embarass des richesses*)くらいである．この参考書のリストでは，それら多くのもののうちごく一部だけしか挙げることができない．Whittakerのこの書物は，それらの中で主なものの1つである．本書のこの章に関係のある部分は，この書物の第IX章と第X章の初めの2節である．また，第VII章の終りの4節は，定常運動のまわりの振動に関連した題材や例題が豊富に与えられている．ただし，しばしばみられるように，著者は問題を，実際よりも複雑に思われるように扱っている．

C. Lanczos, *Variational Principles of Mechanics.* 正準方程式に関する第6章において，Hamilton形式への移行によって，配置空間から位相空間へと，変数の領域の次元が2倍になったことを強調していることは注目に値する．この書物の第5章には，最小作用の原理の，本書のこの章で与えられたものと多少異なった見方が与えられている．

J. L. Synge, *Classical Dynamics.* これは，*Encyclopedia of Physics* の Vol III/1に収められている，かなりの分量(224ページ)の書物である．この書物は，通常の項目の多くを取り扱っているが，しばしば極めて独創的な観点に立っている．力学の一般論についての節Eでは，種々の変数の空間に関する定式化が与えられており，時間およびエネルギーを含むように拡張された位相空間も用いられている．手ごわい所もしばしばあるが，努力しても読む価値のある書物である．

L. A. Pars, *Treatise on Analytical Dynamics.* Hamiltonの方程式は，"Lagrange方程式のさらに進んだ応用"についての章の1節が当てられているだけである．しかし，(第9章における)定常運動のまわりの振動へのRouthの方法の適用には，多くの頁がさかれており，また有益である．ただし幾分か，まとまりのよくない点はある．

K. R. Symon, *Mechanics.* 定常運動のまわりの微小振動に関する議論(第12.6節)は，ラウシアンに言及することを拒否しているために，幾らかぎこちないものになっている
p.372
が，この問題についての記述は熟練家のものである．著者の研究上の関心には，加速

器の理論が含まれているが，そこでは微小振動の安定性が重要な問題である．1例としてベータトロン振動(Betatron oscillation)が論じられている．もう1つの珍しい例は，3体問題におけるいわゆるLagrange点の安定性の取り扱いである．

D. A. WELLS, *Lagrangian Dynamics.*　Hamiltonの方程式についての議論はあるが，簡単すぎてあまり参考にならない．しかしながら，ラウシアンを用いる立場から，定常運動のまわりの振動を広い範囲にわたって取り扱った章があり，多くの図が用いられて，多くの例題が示され，それらの殆どに工学的な入門的解説が与えられている．

P. A. M. DIRAC, *Lectures on Quantum Mechanics.*　Diracが行った講義のいくつかを集めた小冊子で，古典力学から量子力学への移行に関する彼の関心について述べられている．同次問題を扱う彼の方法の概観が述べられている．その問題に対して，彼は弱い拘束と強い拘束とを区別することを考案した．(次章で述べられる)正準変換について，多少知っていた方が理解し易いであろう．

H. RUND, *Hamilton–Jacobi Theory in the Calculus of Variations.*　前章で，この書物では同次問題について，広い範囲にわたる取り扱いがあるということを述べておいた．しかし，その取り扱い方は一般的に受け入れられているようには思えない．

D. TER HAAR, *Elements of Hamiltonian Mechanics.*　修正されたHamiltonの原理のこの著者の取り扱いが本書と異なっている理由についてはすでに述べた(538ページ)．しかしながら，注目すべき点は，最小作用の原理の場合と同様に，時間が変化されるような変分原理の取り扱い，および時間とエネルギーを正準変数として取り扱うように形式的に拡張することである．しかし，同次問題に含まれている危険性については不十分な注意しか与えられていない．

P. BRUNET, *Étude Historique sur le Principe de la Moindre Action.*　最小作用の原理の初期の歴史に興味のある人は，この書物の洗練された取り扱いを見るとよい．Maupertuisによる目的論的な最初の取り扱いから，力学を発展させる確固たる手段へと変えられた，Lagrangeの時代までのことが扱われている．

R. L. LINDSAY AND H. MARGENAU, *Foundations of Physics.*　この書物におけるHamiltonの原理および最小作用の原理の記述によると，力学系があたかもその運動が向って行くべき最終的な状態を，意識的に知り得る能力を持っているかのように思われる．もちろんこれは見掛けの上だけのことにすぎない．系の運動は，初期条件だけで決定される．しかしながら，上のような見解から，過去において多くの哲学的な思弁が生じたのである．第3章には，このような点についての適切な議論が与えられており，また，さらに先へ進もうとする読者のために参考書が挙げられている．

演 習 問 題

1. a）$\dot{q}_i$を独立変数として取り扱うように，$H(q_i, p_i, t)$から$L(q_i, \dot{q}_i, t)$へLegendreの逆変換を行って，Lの性質を求め，Lagrangeの方程式が導かれることを示せ．

b）同じ手法によって，関数，

$$L'(p, \dot{p}, t) = -\dot{p}_i q_i - H(q, p, t),$$

を用いて，運動方程式を求めよ．

2. 中心力を及ぼし合う2個の質点の運動に対するHamiltonの方程式を作り，サイクリック座標を消去し，結果を求積法の形に表わせ．

p. 373

3. 図1−4に示されている2重振子の問題を，ハミルトニアンとHamiltonの運動方程式を用いて定式化せよ．ハミルトニアンは，Lから直接，または(8−19)式からも求められるであろう．

4. ある系に対するラグランジアンは，

$$L = a\dot{x}^2 + b\frac{\dot{y}}{x} + c\dot{x}\dot{y} + fy^2\dot{x}\dot{z} + g\dot{y} - k\sqrt{x^2 + y^2},$$

と書ける．ここでa, b, c, f, gおよびkは定数である．ハミルトニアンはどうなるか．保存量は何か．

5. ある力学系が，ラグランジアン，

$$L = \dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{a + bq_1^2} + k_1 q_1^2 + k_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2,$$

を持つとする．ただし，a, b, k_1およびk_2は定数である．Hamilton形式における運動方程式を求めよ．

6. 自由度が1の系のハミルトニアンが，

$$H = \frac{p^2}{2a} - bqpe^{-\alpha t} + \frac{ba}{2}q^2 e^{-\alpha t}(\alpha + be^{-\alpha t}) + \frac{kq^2}{2},$$

の形であるとする．ただし，a, b, αおよびkは定数である．

a）このハミルトニアンに対応するラグランジアンを求めよ．

b）時間に陽には依存しない，等価なラグランジアンを求めよ．

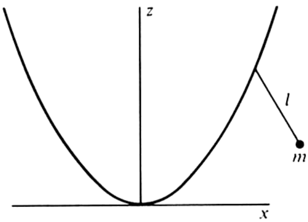
c）この第2のラグランジアンに対応するハミルトニアンは何か．この2つのハミルトニアンの間には，どのような関係があるか？

7. 第5章の演習問題13で述べた系に対するハミルトニアンを求め，この系に対する

Hamiltonの運動方程式を作れ．ハミルトニアンを求めるのに，直接求める方法および行列を用いる方法の両方を用いよ．

8. 前問を，今度は振子が3次元的に運動し得る場合，すなわちバネのついた球面振子の場合に繰り返せ．直接求める方法または行列を用いる方法のどちらを使ってもよい．

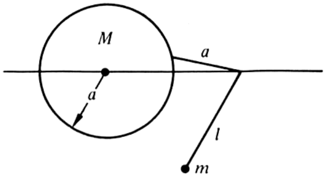
9. 長さ l，質量 m の単振子の支点が，鉛直面内の放物線 $z = ax^2$ の上を動くように拘束されている．振子および振子の支点の運動を定めるためのハミルトニアンを求めよ．Hamiltonの運動方程式を求めよ．



p. 374
10. 長さが l で，質量が m の質点を持つ平面振子の支点が，鉛直面内にある半径 a の円周上を一様に回転しているとき，振子に対するHamiltonの運動方程式を求めよ．正準運動量およびハミルトニアンの物理的性質について述べよ．

11. a) 図に示されているように，質量 m，長さ l の平面単振子の支点が，水平な軌道に沿って動くように拘束されており，さらにその支点は，質量 M，半径 a のはずみ車の周上の1点と，質量のない長さが同じく a の連結棒でつながれている．はずみ車は，水平軌道上の1点に固定された中心のまわりに回転する．合成系に対するハミルトニアンおよびHamiltonの運動方程式を求めよ．

b) 支点が水平軌道に沿って，ある時間の関数 $x = f(t)$ に従って動くとする．ただし x は(はずみ車の中心に関して) $x = \pm 2a$ の点で反転するとする．再び，ハミルトニアンおよび Hamilton の運動方程式を求めよ．



12. 第2章演習問題20で表わされた系に対して，まず実験室系における座標を用いて，次に回転系における座標を用いて，系のハミルトニアンを求めよ．ハミルトニアンの保存性はどのようになっているか？またそれは系のエネルギーとどのような関係があるか？

13. a) 質量m，電荷eの粒子が，ポテンシャル$V(r)$をもつ中心力と，一定で一様な磁場$\mathbf{B}$の影響の下に一平面上を運動している．ただし$\mathbf{B}$は，平面に垂直であり静的なベクトル・ポテンシャル，

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r},$$

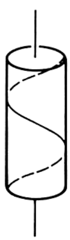
から求められるものとする．観測者の慣性系における座標を用いて，ハミルトニアンを求めよ．

b) 平面に垂直な軸のまわりに，(a)の座標系に関して角速度，

$$\omega = -\frac{eB}{2mc},$$

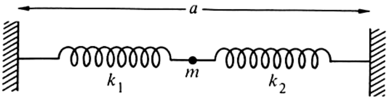
で回転している座標系を用いて，(a)と同じことを繰り返せ．

14. 半径a，密度ρの円筒が，鉛直軸のまわりに自由に回転できるように取りつけられている．円筒の表面には堅く固定された一様な渦巻き状，すなわち，らせん状の道が
p.375 付けられていて，それに沿って質量mの質点が摩擦なしにすべる．質点は，円筒の頂上より，静止の状態から出発して，重力の影響の下にすべり落ちるとする．適当な1組の座標を用いて，質点と円筒の合成系に対するハミルトニアンを求め，系の運動を解け．



15. 前問の例において，円筒が角振動数ωで一様に回転させられているとする．慣性座標系および回転している円筒に固定された座標系において，質点に対するハミルトニアンを作れ．各々の場合について，ハミルトニアンの物理的性質を定め，ハミルトニアンが保存されるかどうかを示せ．

16. 距離aだけ離れた2つの固定点につながれた2本のバネの力を受けて，質量mの粒子が1次元的に動くことができるとする(図を見よ)．バネはHookeの法則に従い，伸



びはなく，バネの定数はそれぞれk_1およびk_2とする．

a) 1つの固定点を規準とした粒子の位置を一般化座標として用いて，ラグランジアンおよび対応するハミルトニアンを求めよ．エネルギーは保存されるか？ハミルトニアンは保存されるか？

b)
$$Q = q - b\sin\omega t, \qquad b = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2},$$

によって定義される新しい座標Qを導入する．Qを用いてラグランジアンを表わせ．対応するハミルトニアンはどうなるか？エネルギーは保存されるか？ハミルトニアンは保存されるか？

17. a) 1自由度の系のラグランジアンが，

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}^2\sin^2\omega t + \dot{q}q\omega\sin 2\omega t + q^2\omega^2),$$

と書けるものとする．対応するハミルトニアンを求めよ．それは保存されるか？

b)
$$Q = q\sin\omega t$$

によって定義される新しい座標を導入する．新しい座標を用いて，ラグランジアンおよび対応するハミルトニアンHを求めよ．Hは保存されるか？

18. 質点間の相互作用が，それらの間の距離にのみ依存するポテンシャルによって表わされ，また各質点は1つの固定された点からの保存的な中心力を受けているような質点系を考える．力の中心を原点とし，1つの慣性系から見てある軸のまわりに角速度ωで回転している座標軸の組に関して，ハミルトニアンを求めよ．この場合，ハミルトニアンの物理的意味は何か？それは運動の定数であるか？

19. 前に述べたように，運動方程式を変えることなしに，q_iおよびtの関数の時間に関する全導関数をラグランジアンに付け加えることができる．こうすることによって，
p. 376
正準運動量およびハミルトニアンはどう変わるか？新しいハミルトニアンを用いた運動方程式は元のHamiltonの運動方程式に帰着されることを示せ．

20. ラグランジアンは$\dot{q}$について高々2次の多項式であると仮定する．$2n$個の方程式，

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

を，ラグランジアンの行列形式を用いて，q および p で表わした，$\dot{q}_i$ および $\dot{p}_i$ に対する $2n$ 個の方程式に変換せよ．これらの方程式が，Hamiltonの運動方程式から得られるものと同じであることを示せ．

21. $\dot{q}_i$ と $\dot{p}_i$ を独立変数とし，"ハミルトニアン" $G(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t)$ を持つようなHamilton形式に似た形式を作ることができる（ここで，p_i は $q_i, \dot{q}_i$ を用いて通常の方法で定義される）．Lagrange形式から出発して，$G(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t)$ を作る方法を詳しく示し，対応する"Hamiltonの運動方程式"を導け．

22. 1点が固定された重い対称こまのハミルトニアンを求め，それを用いてHamiltonの運動方程式を作れ．この方程式と，第5－7節で論じた方程式との関係を調べ，特にどのようにすれば解が求積法の形に表わされるかを示せ．また，Routhの方法を用いてサイクリック座標を消去せよ．

23. 第1章演習問題13には，Weberの電気力学において仮定された，速度に依存するポテンシャルが与えられている．このようなポテンシャルの場の中で運動する1個の粒子のハミルトニアンを求めよ．

24. もし λ_i が正方行列の固有値であるならば，その逆行列が存在すれば固有値 λ_i^{-1} を持つことを示せ．

25. 行列 $\mathbf{J}$ は，(8－32)式および(8－33)式で与えられる性質を持つこと，およびその行列式の値が $+1$ であることを証明せよ．

26. Hamiltonの原理は，

$$\delta\int_1^2 [2H(\boldsymbol{\eta}, t) + \boldsymbol{\eta}\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\eta}}]\,dt = 0,$$

と書けることを示せ．

27. (8－39)式および(8－41)式で与えられるハミルトニアンは，共に(8－38)式で表わされる運動に導くことを示せ．

28. "速い"こまの章動を，定常運動のまわりの微小振動の例として取り扱え．この場合の定常運動は，一定の θ を持つ歳差運動である．章動の振動数を求めよ．

29. 対称こまが，その質量中心のまわりに回転できるように支えられている．その回転の中心は1つの鉛直軸のまわりに自由に回転できる水平な円板の中心からの距離が一定の値 r となるように固定されている．こまは，初めは鉛直軸と角 θ_0 をなすような対称軸のまわりに回転し始めるとする．こまの可能な章動を，定常運動のまわりの微小振動として調べよ．

30. 2個の質点 m_1 と m_2 が，Hookeの法則に従って力を及ぼすバネ定数 k の弦でつながれている．1個の質点は，滑らかな水平面上を摩擦なしに自由に運動するとし，他の

1個は水平面上の穴を通して鉛直につり下げられている．水平面上の質点が，穴からの距離が一定に保たれるように，一様に回転する定常運動が存在する条件を求めよ．穴からの動径方向の距離の微小振動および第2の質点の鉛直方向の高さの微小振動について調べよ．

p. 377

31. (8－71)式の形の修正された Hamilton の原理から，Hamilton の運動方程式が導かれることを示せ．

32. もし，正準変数のすべてが独立ではなく，

$$\psi_k(q_i, p_i, t) = 0,$$

という補助条件で関係づけられているとすると，正準運動方程式は，

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,$$

と書けることを示せ．ただし，λ_k は Lagrange の未定乗数である．t を正準変数とする Hamilton 形式はこの例になっている．というのは，p_{n+1} と他の正準変数との間に，

$$H(q_1, \ldots, q_{n+1}; p_1, \ldots, p_n) + p_{n+1} = 0,$$

という関係があるからである．このような事情のために，この定式化における $2n+2$ 個の Hamilton の方程式は，$2n$ 個の通常の Hamilton の方程式と，(8－35)式および，

$$\lambda = \frac{dt}{d\theta},$$

なる関係に帰着されることを示せ．これらの結果は，相対論的に共変な Hamilton 形式を思い出させるが，全く非相対論的力学の枠内で到達されたものであることに注意せよ．

33. 場と相互作用している1粒子系の共変的なラグランジアンとして，

$$\Lambda = \tfrac{1}{2} m u_\lambda u_\lambda + D_{\lambda\nu}(x_\mu) m_{\lambda\nu},$$

をとることが可能である．ここで $D_{\lambda\nu}(x_\mu)$ は反対称テンソル場であり，$m_{\lambda\nu}$ は反対称角運動量テンソル，

$$m_{\lambda\nu} = m(x_\lambda u_\nu - x_\nu u_\lambda),$$

である．正準運動量はどうなるか．このラグランジアンに対応する共変的ハミルトニアンを求めよ．

第9章　正　準　変　換

p. 378
ある与えられた力学の問題に対して，Hamilton 形式の理論を直接適用しても，通常それを解くときの困難さは実質的には減らない．実際，われわれが解かなければならない微分方程式は，ラグランジアンを用いる手続きで得られるものと同じである． Hamilton 形式の利点は，それを計算の手段として用いることにあるのではなく，むしろ力学の形式的な構造に対する，より深い見通しを与えてくれるという点にある．座標と運動量に対して，独立変数として同等の資格が与えられるということによって，“座標”および“運動量”と名付けられる物理量を選ぶに当って大幅な自由度が許される．その結果，力学の物理的な内容を，一層新しくまた一層抽象的な形で記述することができるようになる．このような抽象的な形式は，一方では力学の問題に対する実際的な応用においても，しばしば非常に役に立つのであるが，今日われわれがそれに関心をもつ第1の理由は現代的な物質構造の理論において，このような形式が本質的な役割を演ずるからである．すなわち，古典力学のこのようないろいろな理論形式は，統計力学および量子力学の両方に対する出発点として役立つ．この章および次の章では，ハミルトニアンを用いる方法の発展として生じてきた，このような理論形式について述べることにしよう．

9−1　正準変換の方程式

Hamiltonの方程式の解が自明であるような1つの型の問題がある．ハミルトニアンが運動の定数であって，**すべての**座標 q_i がサイクリックであるような場合を考えよう．このような条件の下では，共役な運動量 p_i はすべて定数である．

$$p_i = \alpha_i.$$

そして，ハミルトニアンは時間およびサイクリック座標のいずれをも陽に含んでいないから，それは次のように書くことができる．

$$H = H(\alpha_1 \ldots \alpha_n).$$

したがって，$\dot{q}_i$ に対するHamiltonの運動方程式は，単に，

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i, \tag{9－1}$$

p.379
となる．ここで ω_i は α_i だけの関数であり，それゆえ時間的に一定である．このことから直ちにわかるように，方程式（9—1）は，

$$q_i = \omega_i t + \beta_i, \tag{9－2}$$

という解をもつ．ここで β_i は積分定数であって，初期条件から定められる．

この型の問題を解くことは，余りにもやさし過ぎて，単にアカデミックな興味があるだけであるように思われるであろう．というのは，実際の問題では，このようにすべての一般化座標がサイクリックであるというようなことは，滅多に起こらないからである．しかし，与えられた系を記述する一般化座標の組には，いろいろなとり方がある．例えば，平面上の１個の粒子の運動を論じるときには，一般化座標として，直交座標，

$$q_1 = x, \qquad q_2 = y,$$

を用いることもできるし，あるいは平面極座標，

$$q_1 = r, \qquad q_2 = \theta,$$

を用いることもできる．これらのうちのどちらを用いてもよいのであるが，問題によっては，どちらか一方を用いる方が他方を用いるよりも便利な場合がある．例えば，中心力の問題に対しては，x も y もサイクリック座標ではないが，平面極座標を用いれば，角 θ はサイクリック座標になることに注意しよう．このように，サイクリック座標の数は，一般化座標のとり方によって変わるのである．そして，各問題に対して，すべての座標がサイクリックになるような，１つの特別な座標の選び方がある場合があるかもしれない．もしこのような一般化座標の組を見つけることができれば，後の仕事は取るに足らないものとな

る．ところが，問題から直接に示唆される一般化座標は，通常はサイクリックにはなっていないので，われわれはまず，1組の変数からもっと適切な変数の組へ**変換する**特殊な方法を見出さなければならない．

前章で考えた変換は，次のような形の変換式，

$$Q_i = Q_i(q, t), \tag{9-3}$$

によって1組の座標 q_i から新しい1組の座標 Q_i へ移ることを意味していた．例えば，直交変換の式，あるいは直交座標から平面極座標への変換式は，一般の変換式（9－3）の形を持っている．すでに，第1章の演習問題15で注意したように，このような変換は**点変換**（*point transformation*）として知られている．ところが，Hamilton形式では運動量も一般化座標と同じ資格で独立変数として取り扱われる．それゆえ，座標変換という概念は，独立変数である**座標**および**運動量** q_i, p_i を，（逆に解ける）変換式

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t), \\ P_i &= P_i(q, p, t), \end{aligned} \tag{9-4}$$

によって，同時に新しい変数 Q_i, P_i の組に変換するような変換をも含むように拡張されなければならない．上の変換式からわかるように，新しい座標は，

p. 380

元の座標だけでなく元の運動量をも含む関数として定義されるのである．（9－3）式は，**配置空間**（*configuration space*）の1つの変換を定義し，これに対応して（9－4）式は**位相空間**（*phass space*）の1つの変換を定義すると言ってよいであろう．

ハミルトニアンを用いる力学の形式を展開するに当って，われわれが関心を持つのは，新しい Q, P が正準変数になるような変換だけである．この要求は，ある関数 $K(Q, P, t)$ があって，新しい変数を用いて書いた運動方程式が，Hamilton の運動方程式の形，すなわち，

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \tag{9-5}$$

になれば満足されるであろう．新しい座標 Q_i，P_i の組に対しては，関数 K が

ハミルトニアンの役割を演ずる*．考えている変換が，問題には依存しないということは，後の考察において重要となるであろう．すなわち，(Q,P) はある特定の力学系に対してのみならず，同じ数の自由度をもつすべての系に対して正準座標でなければならない．Hの初めの特別な形がどうであっても，（9－5）式は新しい座標と運動量の運動方程式でなければならない．実際，例えば平面調和振動子を取り扱うために，(q,p) から (Q,P) への特殊な変換を見出すことが必要となる．しかし，同じ変換は，例えば2次元の Keplerの問題に適用されたとき，やはり Hamilton の運動方程式を導かなければならない．

第8－5節で見たように，Q_iと P_i が新しい正準変数であるならば，それらは変形された Hamilton の原理，

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t))\,dt = 0, \qquad (9-6)$$

を満足しなければならない（ここで，繰り返し現われる指標 i については和をとるものとする）．同時に，元の座標はもちろん，同じような変分原理，

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(p_i\dot{q}_i - H(q,p,t))\,dt = 0\,, \qquad (9-7)$$

を満足する．（9－6）式と（9－7）式が同時に成立するということは，もちろん，2つの積分において被積分関数が等しいことを意味しない．変形された Hamilton の原理の一般的な形では，端点での変分が零であるから，（9－6）式と（9－7）式は，それらの式の被積分関数が，

$$\lambda(p_i\dot{q}_i - H) = P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}\,, \qquad (9-8)$$

p. 381
の関係で結びつけられているならば成立するであろう．ここでFは，連続な2階導関数をもつ，位相空間の座標の任意の関数であり，λ は正準座標と時間に無関係な定数である．乗数である定数 λ は**スケール変換**（ *scale transfor-*

---

*）Hがハミルトニアンを表わすならば，冗談半分にKはカミルトニアン（ Kamiltonian ）を表わすと言われてきた！ もちろん，KはハミルトニアンHと同じ性質を持っているが，カミルトニアンという言い方は時折，長たらしい“変換されたハミルトニアン”という言い方のかわりに便宜的に使われる．

mation）として知られている，正準変換の特に簡単な型の変換と関係づけられる．座標と運動量を測定するために用いられた単位の大きさを変えると仮定しよう．このことは，実際には，

$$Q_i' = \mu q_i, \qquad P_i' = \nu p_i, \tag{9-9}$$

で定義される変数の組 (Q', P') へ変換することになる．このとき，（9－5)式の形の Hamilton の方程式が，変換されたハミルトニアン $K'(Q', P') = \mu\nu H(q, p)$ に対して成立することは明らかである．対応する変形されたHamiltonの原理の被積分関数もまた，明らかに，

$$\mu\nu(p_i\dot{q}_i - H) = P_i'\dot{Q}_i' - K', \tag{9-10}$$

のように関係づけられる．この式は，（9－8）式で $\lambda = \mu\nu$ と置いたものと同じ形である．したがって，適当なスケール変換によって，$\lambda = 1$であるような正準座標の変換にのみ注目すればよいことになる．すなわち，$\lambda \neq 1$であるような正準座標の変換 $(q, p) \to (Q', P')$ があるならば，そのときには，(Q', P')と（9－9）式の形でかつ $\mu\nu$ が λ と同じ値であるような単純なスケール変換によって関係づけられる正準座標の中間的な組 (Q, P) を常に見出すことができる．正準座標 (q, p) と (Q, P) の2つの組の間の変換は（9－8）式を満足し，今度は $\lambda = 1$ である．すなわち，

$$p_i\dot{q}_i - H = P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}, \tag{9-11}$$

である． Landau と Lifshitz がスケール変換の特性を記述しているように，[*] スケール変換は基本的にはよくわかっているので，調べてみなければならない重要な変換は（9－11）式が成り立つような変換である．

$\lambda \neq 1$ に対する正準座標の変換は，**広義の正準変換**（*extended canonical transformation*）と呼ばれる．$\lambda = 1$ であり，したがって（9－11）式が

---

*) Landau and Lifshitz, *Mechanics*, 1960, p.144. を見よ．ここで定義されたようなスケール変換は，時々**膨張対称**（ *dilatation symmetry* ）と呼ばれているものに含まれるスケール変換と同じではないが，これに関係づけられる．その変換では時間の尺度もまた変換され，新しい正準座標と，元の正準座標について同じ関数関係を持つ，特殊な種類のハミルトニアンに注意が集中される．演習問題2を見よ．

成り立つときには，単に正準変換（ *canonical transformation* ）ということにしよう．そうすると前のパラグラフの結論は，次のように述べることができる．すなわち，任意の広義の正準変換は，１つの正準変換に引き続いてスケール変換を行うことによって作り上げることができる．特に断わらない限り，これからは正準座標間の変換としては正準変換のみを考察するものとしよう．

p. 382 変換式（９－４）が時間を陽に含まない正準変換に対して，特別な名前をつけておくのが便利である．それを，**限定された正準変換**（ *restricted canonical transformation* ）と呼ぶことにする.*

（９－11）式の右辺の最後の項は，もしFが (q,p,t) または (Q,P,t) あるいはこれらの位相空間の座標からの任意にとられたものの関数であるならば，作用積分の変分に端点においてのみ寄与するが，これらの座標の変分は端点において零であるから，その寄与は零になるであろう．さらに，変換方程式（９－４）式とそれらの逆変換によってFは，元の変数の組の一部と，また新しい変数の組の一部とによって表わすことができる．実際，Fは，（時間以外の）変数の半分が元の変数の組からとられ，半分が新しい変数の組からとられるときにのみ，正準変換の正確な形を規定するのに有用である．そのときFは，いわば正準変数の２つの組を橋わたしするものとして働き，変換の**母関数**（ *generating function* ）と呼ばれる．母関数が変換式をどのように規定するかを示すために，Fは元の一般化座標と新しい一般化座標の関数として与えられると仮定しよう．

---

*）今日の，すべてではないが大部分の著者は，正準変換という用語を，ここで与えた定義と同じ流儀で使っている．この用語のこれ以外の使用法は標準的なものではない．文献の中で一様に行われている慣習は存在しないし，この混乱が日時が経過すると共に減って行くようにも見えない．上述の用語は，物理学の要求に対して適切であるように与えられている．物理学の多くの文献において，**接触変換**（ *contact transformation* ）という言葉が，正準変換に対する完全な同義語として用いられる．しかし数学では，この接触変換という言葉は異なった意味で導入されたものである．著者によっては，接触変換という言葉を，時間座標の変換もあるときにのみ用いている．以下で見るように，この場合には，接触変換は，拡張された位相空間の中での限定された正準変換と等価である．拡張された位相空間では，時間は正準座標の１つであって，この定式化は明らかに，特殊相対論に対して特に適切なものである．数学者の意味における接触変換については，C. Carathéodory, *Calculus of Variations* Part 1, 1965. Chapter 7およびH. Rund, *Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations,* 1966, pp. 84-85 を見よ．

$$F = F_1(q, Q, t). \tag{9-12}$$

そのとき，（9−11）式は，

$$p_i\dot{q}_i - H = P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt},$$

$$= P_i\dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i, \tag{9-13}$$

の形になる．2組の座標 q_i と Q_i とは，別々に独立変数と考えられているから，（9−13）式が恒等的に成立するのは，$\dot{q}_i$ と $\dot{Q}_i$ の係数が各々零となる場合に限る．すなわち，

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \tag{9-14a}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \tag{9-14b}$$

であり，最後に，

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \tag{9-14c}$$

p. 383
でなければならない．（9−14a）の n 個の式は，q_j, Q_j および t の関数としての p_i を定義する式である．これを逆に解くことができると仮定すれば，n 個の Q_i を q_j, p_j, t によって表わすことができる．これが変換式（9−4）の前半を与える．このように，一度 Q_i が元の正準変数 q_i, p_i および t の関数として表わされさえすれば，それを用いて（9−14b）から，n 個の P_i が q_i, p_i および t の関数として与えられる．これが変換式（9−4）の後半にほかならない．最後に，（9−14c）式によって，新しいハミルトニアンKと，元のハミルトニアンHとの関係が与えられ，これで変換は完了する．（9−14c）を見るときには，適切な注意を払わなければならない．まず，H の中の q と p を，（9−4）式の逆変換によってQとP の関数として表わす．次に，$\partial F_1/\partial t$ の中のq_iも同様にして Q, P によって表わし，これら2つの関数を加え合わせて $K(Q, P, t)$ が与えられる．

上で述べた手続きは，与えられた母関数 F_1 から出発して，どのようにして

正準変換が得られるかを示している．通常，その過程を逆にすることができる．すなわち，変換式（9－4）が与えられれば，適当な母関数 F_1 を導き出すことができる．最初に（9－4）式を， p_i と P_i を q, Q, t の関数として表わすように逆に解く．そうすると（9－14 a，b）式は1組の連立偏微分方程式となり，もし変換が実際に正準的であるならば，積分ができて，原理的には F_1 を求めることができる． F_1 は，付加的な t のみの任意関数の範囲内で常に不確定であるが，このことは変換には影響を与えない．そして時には他の不確定さがあるであろう．

$F_1(q, Q, t)$ の型の母関数によって正準変換を記述することが適当でないことが時々生じる．例えば，変換が，p_i が q, Q および t の関数として書けず，むしろ q, P および t の関数である場合である．このときには元の座標 q と新しい運動量 P の関数である母関数を探すことになる．明らかに，（9－13）式は $\dot{Q}_i$ よりもむしろ $\dot{P}_i$ を含む等価な関係式によって置き換えられなければならない．このことは，（9－11）式における F を，

$$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i, \qquad (9-15)$$

のように書くことによって行うことができる．この F を（9－11）式に代入すれば，

$$p_i \dot{q}_i - H = -Q_i \dot{P}_i - K + \frac{d}{dt} F_2(q, P, t), \qquad (9-16)$$

となる．再び，F_2 の全微分を展開して，$\dot{q}_i$　$\dot{P}_i$ の係数をまとめて零とおけば，

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \qquad (9-17\,a)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \qquad (9-17\,b)$$

および

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \qquad (9-17\,c)$$

p. 384
が導かれる．前と同じように，（9−17a）の式は，P_i について解けば，P_i を q_j, p_j および t の関数として表わすことができて，変換方程式（9−4）の後半に対応する．前半は（9−17b）式によって与えられる．

母関数の残りの2つの一般的な型に対応する手続は，いまや明らかである．元の運動量 p_i 新しい座標 Q_i および時間 t の母関数 F_3 は，

$$F = q_i p_i + F_3(p, Q, t), \tag{9−18}$$

と置くことによって定義される．この F を用いると，（9−11）式は，

$$-q_i\dot{p}_i - H = P_i\dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt}F_3(p, Q, t), \tag{9−19}$$

となる．前に行ったのと同じ係数の比較によって，

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \tag{9−20a}$$

および，

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}, \tag{9−20b}$$

が得られ，（9−20a）の $2n$ 個の方程式から変換式が導出される．母関数が $F_4(p, P, t)$ の形であるならば，F は，

$$F = q_i p_i - Q_i P_i + F_4(p, P, t), \tag{9−21}$$

によって F_4 と関係づけられる．そうすると，（9−11）式は，

$$-q_i\dot{p}_i - H = -Q_i\dot{P}_i - K + \frac{d}{dt}F_4(p, P, t), \tag{9−22}$$

の形になる．このときには，変換式は，

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \tag{9−23a}$$

の関係から導かれ，また，

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}, \tag{9−23b}$$

である．

4つの一般的な母関数の型を Legendre 変換によって互いに関係づけられるものと考えたくなるであろう．例えば，F_1 から F_2 への移行は，

$$-P_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_i},$$

p. 385

の関係式によって，変数 q, Q から q, P に移ることと等価である．これはまさに，8－1節で述べたように，基底となる変数の Legendre 変換に対して要求される形である．（8－5）式との類推で，

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + P_i Q_i, \qquad (9\text{—}24)$$

とおく．これは（9—12）式と（9—15）式を組み合わせたものと同じである．母関数に対する他のすべての定義式は同様にして，（9—12）式と組み合わせると，F_1 からの Legendre 変換と見なすことができ，（9—21）式は2重の Legendre 変換を記述するものと考えることができる．この描像に対する唯一の欠点は，任意の与えられた正準変換に対して，いつでもこれらの Legendre 変換によって，4つのすべての型の母関数を見つけ出すことができる，と信じさせるかもしれないということである．このことは，いつも可能であるわけではない．上で注意され，また次の節で特定の例で示されるように，ある形の母関数による記述が適切でないような変換が存在する．そのようなときにはもし，Legendre 変換を行うことを試みるならば，母関数が恒等的に零となるか，あるいは不定であるということが導かれる．こういう理由のために，$2n$ 個の独立な座標と運動量の，ある指定されない関数である母関数の各々の型を F に関連させて定義する方を選んだのである．

最後に，適当な母関数は，系の自由度の**すべて**に対して，4つの一般的な型のどれか1つに一致する必要はないことを強調しておこう．4つの型の混合になっているような母関数を用いることができるし，またある正準変換に対してはそうする必要がある．簡単な例をあげると，2つの自由度がある場合の特殊な正準変換を，

$$F'(q_1, p_2, P_1, Q_2, t),$$

の形の母関数によって定義するのが都合のよい場合があるかもしれない．この

母関数は,

$$F = F'(q_1, p_2, P_1, Q_2, t) - Q_1 P_1 + q_2 p_2,$$

によって（9―11）式の F に関係づけられ，また，変換式は,

$$p_1 = \frac{\partial F'}{\partial q_1}, \qquad Q_1 = \frac{\partial F'}{\partial P_1},$$

$$q_2 = -\frac{\partial F'}{\partial p_2}, \qquad P_2 = -\frac{\partial F'}{\partial Q_2},$$

と

$$K = H + \frac{\partial F'}{\partial t},$$

から得られる．次の節と演習問題において，具体的な例が示されるであろう．

p. 386

9―2　正準変換の例

正準変換の性質および母関数の演ずる役割を説明するためには，簡単ではあるが重要ないくつかの例をあげるのが最もよい．まず，次のような特別な形を持った第2の型の母関数 F_2 を考えよう．

$$F_2 = q_i P_i. \qquad (9\text{―}25)$$

（9―17）式によって，変換式は,

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i,$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i,$$

$$K = H,$$

となる．新しい変数は元の変数と同じである．すなわち，F_2 は単に**恒等変換**（ *identity transformation* ）を引き起こすにすぎない．

もう少し一般的な変換の型は，母関数,

$$F_2 = f_i(q_1, \ldots, q_n; t) P_i, \qquad (9\text{―}26)$$

によって与えられる．ここで f_i は任意の独立な関数の組であってよい．（9－17b）によって，新しい座標 Q_i は，

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q, t), \qquad (9\text{–}27)$$

で与えられる．このように，母関数（9－26）による変換においては，新しい座標は元の座標と時間だけの関数であって，元の運動量は含んでいない．したがって，そのような変換は（9－3）式で定義された点変換の1例にほかならない．点変換を定義するためには，関数 f_i は独立でかつ逆に解くことができなければならない．そうすると，q_i は Q_i によって表わすことができる．関数 f_i はその他の点では全く任意であるから，**すべての点変換は正準変換である**と結論することができる．（9－17c）は，新しいハミルトニアンを，元のハミルトニアンと関数 f_i の時間に関する導関数で表わす式である．

（9－26）式で与えられる F_2 は，f_i によって規定される点変換を導く唯一の母関数ではないことに注意しよう．明らかに，同じ点変換はもっと一般的な形，

$$F_2 = f_i(q_1, \ldots, q_n; t)P_i + g(q_1, \ldots, q_n\ t)\cdot \qquad (9\text{–}28)$$

からも導びかれる．ここで $g(q, t)$ は元の座標と時間の（微分可能な）任意の関数である．座標に関する変換式（9－27）は，この母関数に対しても変わら
p. 387 ない．しかし，運動量に関する変換式は，この2つの形に対して異なる．（9－17a）式から，（9－28）式によって与えられる F_2 の形を用いて，

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} P_i + \frac{\partial g}{\partial q_j}, \qquad (9\text{–}29)$$

が得られる．これらの方程式を逆に解くには，行列記法で，

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}}, \qquad (9\text{–}29')$$

と書くのが，最も容易であって P は (q, p) の関数として表わされる．ここで，$\mathbf{p}, \mathbf{P}$ および $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}}$ は n 個の要素の1列（1行）行列で，$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$ は正方行列でその ij 要素は $\frac{\partial f_i}{\partial q_j}$ である．$\mathbf{P}$ は，

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{p} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}\right)^{-1}, \qquad (9\text{–}30)$$

によって与えられるPの1次関数であることが導かれる．したがって，Qに対する変換式はgには無関係で，$f_i(q,t)$にのみ依存する．一方Pに対する変換式はgの形に依存し，一般に元の座標と運動量の両方の関数である．（9−26）式によって与えられる母関数は，（9−28）式において$g=0$である特別な場合に過ぎずそのことに対応したPに対する特別な変換式をもっている．

1つの教訓的な正準変換の例は，

$$F_1 = q_k Q_k, \tag{9-31}$$

の形の第1の型の母関数 $F_1(q,Q,t)$ によって引き起こされるものである．この母関数に対応する変換式は，（9−14a，b）から次のようになる．

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i, \tag{9-32a}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i. \tag{9-32b}$$

実質的には，この変換は運動量と座標とを入れ換えるものである．新しい座標は元の運動量であり，新しい運動量は本質的には元の座標である．この簡単な例は，一般化座標と一般化運動量とが独立であることを強調するものである．Hamilton形式においては，一般化座標と運動量とは両方共，系の運動を記述するために必要であって，それらを区別するのは，実際的には名前のつけ方だけである．符号の変化にさえ注意すれば，名前をつけ換えてもかまわない．この理論では，もはや位置座標としてのq_i，質量と速度の積としてのp_iとい
p. 388
う概念の名残りはあとかたもなく消えてしまっている．ここで，pとqとを交換する変換が正準変換であることは，Hamiltonの方程式，

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

の形から直接わかるということを付け加えておこう．すなわちp_iのかわりにq_iを代入するなら，q_iのかわりに$-p_i$を代入するときに限って，方程式が正準形を保つのである．

正準変数を入れ換える変換が，$F_2(q,P,t)$の型の母関数からは導くことがで

きないことも容易にわかる．すなわち，そのような母関数を用いたときに，偏微分方程式の組（9－17a），すなわち，

$$p_i = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i},$$

は，p_i を q, P および t の関数として与えていることが要求される．しかし，正準変数を入れ換える変換では，p_i は全く P の関数ではない．p_i は新しい座標 Q にのみ依存する！　それゆえ，F_2 は正準変数を入れ換える変換に対する母関数としては適当なものではない．

同様の議論によって，F_1 関数は恒等変換をつくるのには用いることができないことは明らかである．その場合には，（9－14a）式，

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i},$$

は，p_i を q, Q および t によって定義する．ところが，恒等変換においては，p_i は実際 P_i に等しく，P のみに依存する．Legendre 変換（（9－24）式参照），

$$F_1(q, Q, t) = F_2(q, P, t) - P_i Q_i,$$

によって，F_1 関数を定義することによっては，この困難を回避することはできない．（9－25）式の F_2 で q を Q と書き換えて，この F_2 を上の式に代入すると，

$$F_1(q, Q, t) = Q_i P_i - P_i Q_i \equiv 0,$$

となり，これは母関数としては役に立たない．正準変数を交換する変換を生成する F_2 関数を作り出す試みにおいても，同様の行き止まりの結論が得られる*.

(q, p) の対のいくつかは変えず，残りの (q, p) の対を（符号の変化も含めて）交換する変換は，明らかに正準変換である．しかし，上の考察から，このような変換は前に論じた“純粋な”4つの形のうちの1つの母関数からは導かれ

*）しかしながら，F_3 関数から恒等変換が生成され，正準変数を交換する変換は F_4 関数から生成されることを，容易に示すことができる．

ない．すなわち，母関数は“混合”型でなければならない．例えば，自由度が２の系において，変換，

$$Q_1 = q_1, \qquad P_1 = p_1,$$
$$Q_2 = p_2, \qquad P_2 = -q_2$$

p. 389
は，関数，

$$F = q_1 P_1 + q_2 Q_2,$$

によって生成される．これは F_1 と F_2 の混合型である．

最後の例として，１次元の調和振動子の問題に用いられる正準変換を考えよう．力の定数を k とすると，普通の座標で表わした，この問題のハミルトニアンは，

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}, \tag{9-33}$$

である．比 k/m を ω^2 で表わせば，H は

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2), \tag{9-34}$$

のように書くことができる．２つの２乗の項の和として表わされるこのハミルトニアンの形から，新しい座標については H がサイクリックであるような１つの変換が示唆される．すなわち，

$$p = f(P)\cos Q, \tag{9-35a}$$

$$q = \frac{f(P)}{m\omega}\sin Q, \tag{9-35b}$$

の形の正準変換を見出すことができれば，Q と P との関数としてのハミルトニアンは，単に，

$$K = H = \frac{f^2(P)}{2m}(\cos^2 Q + \sin^2 Q) = \frac{f^2(P)}{2m},$$

となるであろう．それゆえ，Q はサイクリックである．問題は，これまでのところ指定されていない関数 $f(P)$ の形を，変換が正準変換になるように求める

ことである．（9－35）の2つの方程式の比は，$f(P)$に無関係であって，

$$p = m\omega q \cot Q, \tag{9-36}$$

となる．（9－36）式は，F_1 型の母関数に対する（9－14a）式の形，

$$p = \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q},$$

になっていて，また，（9－36）式に対応する F_1 の最も簡単な解は，明らかに，

$$F_1 = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q, \tag{9-37}$$

となる．このとき，（9－14b）式は変換式の残りの半分，

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}, \tag{9-38}$$

p. 390 を与える．q について解けば，

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \tag{9-39}$$

が得られる．（9－35a）式と比較して，正準変換を与える $f(P)$ の唯一の形は，

$$f(P) = \sqrt{2m\omega P}, \tag{9-40}$$

である．これから，変換された変数で表わされたハミルトニアンは，

$$H = \omega P,$$

であることが導かれる．ハミルトニアンにおいて Q はサイクリック座標であるから，それに共役な運動量 P は一定である．実際，（9－41）式から，P は一定の値を持つエネルギーを ω で割ったもの，

$$P = \frac{E}{\omega}, \tag{9-41}$$

に等しいことがわかる．Q に対する運動方程式は，次のような簡単な形，

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega,$$

となり，解は直ちに求められて，

$$Q = \omega t + \alpha, \tag{9-42}$$

となる．ここで，α は積分定数であって，初期条件によって定められる．（9−39）式に代入すれば，q に対する解，

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha), \tag{9-43}$$

が得られるが，これは調和振動子に対する通常の解である．*

調和振動子の問題を解くのに接触変換を用いることは，“ピーナッツを割るのにハンマーを使う”ようなものだと思われるであろう．しかしながら，この簡単な例は，正準変換を用いることによって，いかにしてハミルトニアンを，すべての座標がサイクリックであるような形にするかという方法を示している．このような方法を用いて，力学の問題を解くための一般的な処方については，次の章で論じることにする．さし当りこの章では，さらに続けて正準変換の形式的な性質を調べて行くことにしよう．

p. 391

9−3 正準変換に対するシンプレクティックな方法

正準変換を取り扱うもう１つの方法は，一見したところでは母関数による定式化と無関係に見えるが，Hamiltonの方程式の行列またはシンプレクティックな定式化（symplectic formulation）によって導かれる．この方法への手引きとして，制限された正準変換，すなわち時間が変換式の中に現われないような変換，

$$Q_i = Q_i(q, p),$$
$$P_i = P_i(q, p), \tag{9-44}$$

*) F_1 関数は，あいまいさなしに正準変換を規定するものではないという主張もあり得よう．なぜなら，q に対する（9−38）式を解くのに，（9−39）式において（暗に示されているように）正の根号をとるかわりに，負の根号をとることもできたであろう．しかし，このような F_1 から導かれる２つの正準変換のちがいは，取るに足りないものである．すなわち，α を π だけずらせば１つの変換からもう１つの変換に移ることになるのである．それにもかかわらず，母関数から導かれた変換は，ときには２価になるかもしれないし，あるいは局所的な特異性を持つかも知れないということは，心に留めておかなければならない．

を考えよう．われわれはハミルトニアン関数が，そのような変換においては変化しないことを知っている．（9－44）式に基づいて，Q_i の時間に関する導関数は，

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\dot{p}_j = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\,, \tag{9－45}$$

であることが見出される．他方，（9－44）式の逆，

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(Q, P), \\ p_j &= p_j(Q, P), \end{aligned} \tag{9－46}$$

から，$H(q, p, t)$ を Q と P との関数と考えることができて，偏導関数，

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\,, \tag{9－47}$$

を求めることができる．（9－45）式と（9－47）式を比較すれば，

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i},$$

となること，すなわち，変換が正準変換になるのは

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P}, \qquad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P}, \tag{9－48a}$$

であるときのみであることが結論される．導関数に付いている添字は，これらの方程式の左辺では，Q_i は (q, p) の関数と考えられ（（9－44）式参照），一方，右辺では導関数は (Q, P) の関数としての q_j と p_j に対するものである（（9－46）式参照）ことを思い出させるために付けてある．同じように，P_i と H の Q_j に関する偏導関数との比較から，次の条件が導かれる．

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}, \qquad \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}. \tag{9－48b}$$

（9－48）式の組は一緒にして，（制限された）正準変換に対する“直接的条件”（ direct condition ）と呼ばれることがある．

p. 392

8－1節の終りで導入した，ハミルトニアン形式に対するシンプレクティック記法を用いるならば，（9－48）式を導く代数的計算は，簡潔でエレガント

な形で行うことができる．$\boldsymbol{\eta}$を$2n$個の要素 q_i, p_i を持つ1列行列であるとすれば， Hamiltonの方程式は，

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \qquad (8-31)$$

と書けることを思い出そう．ここで$\mathbf{J}$は（8−30）式で定義された反対称行列である．同様に，新しい座標 Q_i, P_i の組は，$2n$個の要素を持つ1列行列$\boldsymbol{\zeta}$を定義する．そうすると制限された正準変換に対しては，変換式（9−44）は，

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta}), \qquad (9-49)$$

となる．（9−45）式と同じように，$\boldsymbol{\zeta}$の代表的な要素の時間に関する導関数，

$$\dot{\zeta}_i = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j}\dot{\eta}_j, \qquad i,j = 1,\ldots,2n \ ,$$

に注意することによって，新しい変数に対する運動方程式を求めることができる．行列の記法では，この時間に関する導関数は，

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\eta}} \ , \qquad (9-50)$$

と書くことができる．ここで$\mathbf{M}$は

$$M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \ , \qquad (9-51)$$

を要素とする，変換の Jacobi の行列である．$\boldsymbol{\eta}$に対する運動方程式を利用すれば，（9−50）式は，

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{M}\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \ , \qquad (9-52)$$

となる．ここで，逆変換によってHは$\boldsymbol{\zeta}$の関数と考えることができる．そしてη_iに関する導関数は，

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \frac{\partial H}{\partial \zeta_j}\frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i},$$

によって計算される．すなわち，行列の記法では，

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \widetilde{\mathbf{M}}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}}, \qquad (9-53)$$

p. 393
と書くことができる.* （9－52）式と（9－53）式を組み合わせると，正準変数の組 $\boldsymbol{\eta}$ から，時間には独立に変換される任意の変数の組 $\boldsymbol{\zeta}$ に対する運動方程式

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{MJ\widetilde{M}}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}}, \tag{9-54}$$

が導かれる．母関数による定式化から，**制限された**正準変換に対して，元のハミルトニアンを新しい変数によって表わすと，新しいハミルトニアンが得られることを知っているから，

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}},$$

が得られる．したがって，変換式（9－49）は，$\mathbf{M}$が次の条件，

$$\mathbf{MJ\widetilde{M}} = \mathbf{J}, \tag{9-55}$$

を満たすなら，正準変換である．（9－55）式が，制限された正準変換に対する必要条件でもあるということは，証明の手順を逆にすることによって容易に示される．時間に無関係な広義の正準変換に対しては，$K = \lambda H$である場合には，（9－55）式の条件は，

$$\mathbf{MJ\widetilde{M}} = \lambda\mathbf{J}, \tag{9-56}$$

で置き換えられることを注意しておこう．

（9－55）式は，いろいろな形に表わすことができる．$\mathbf{\widetilde{M}}$の逆行列を右から掛けると，

$$\mathbf{MJ} = \mathbf{J\widetilde{M}}^{-1}, \tag{9-57}$$

となる（逆行列の転置行列は転置行列の逆行列であるから）．行列方程式（9－57）の要素は，（9－48a）および（9－48b）と同じものであることがわかるであろう．（9－57）式に左から $\mathbf{J}$ を掛け，右から－ $\mathbf{J}$ を掛けると，（8－32）式によって，

---

*）第7－3節を読んだ人は，（9－50）式は $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ がこの変換の下で反変的に変換するということを述べており，また（9－53）式は $\boldsymbol{\eta}$ の要素に関するHの偏導関数は**共変的に**変換する，ということがわかるであろう（（7－48）式と（7－49）式を参照）．

$$\mathbf{JM} = \widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{J},$$

または,

$$\widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{JM} = \mathbf{J}, \tag{9–58}$$

となる. (9−55)式, またはそれと等価な形(9−58)式は, 正準変換に対するシンプレクティック条件(*symplectic condition*)といわれ, この条件を満たす行列**M**は**シンプレクティック行列**(*symplectic matrix*)といわれる((7−43)式の解釈に従うと, (9−58)式は**J**が計量テンソルである位相空間の中での直交行列が**M**であることを述べているとみなすことができるが, この見方は特に有用なものではない).

時間をパラメーターとして含む正準変換に対しては, 上で与えられたシンプレクティック条件の簡単な導出法はもはや成立しない. それにもかかわらず, シンプレクティック条件は, たとえ変換が時間を含む場合でも, 正準変換に
p. 394
対する必要十分条件となっているのである. 制限された正準変換に対して用いられた手続きと似た, 長たらしいけれども直接的な手続きによって, すべての正準変換に対してシンプレクティック条件が一般的に成立することを証明することができる*. ここではそのかわりに, 異なった方針, すなわち, 時間を含む正準変換のパラメーターを用いる形を利用するやり方を取ってみよう.

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta}, t), \tag{9–59}$$

の形の正準変換は, 時間がある初期値 t_0 から増えるにつれて, 連続的に発展する. この変換は, 数学者 Sophus Lie によって初めて体系的に研究された, 連続変換の族の1パラメーターの場合の例であって, 古典力学の変換理論において独特の役割を演ずるものである. 変換,

$$\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\zeta}(t), \tag{9–60a}$$

が正準変換であるなら, 変換,

*) この方法に対しては, L. A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics*, 1965, pp.514-515 とG. S. S. Ludford and D. W. Yannitell, *Am. J. Phys.* **36**, 231 (1968) を見よ.

$$\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\zeta}(t_0), \tag{9-60b}$$

も明らかに正準変換である．正準変換の定義から，

$$\boldsymbol{\zeta}(t_0) \to \boldsymbol{\zeta}(t)\,, \tag{9-60c}$$

によって特徴づけられる変換もまた正準変換である．(9－60b)におけるt_0は，固定された定数であるから，この正準変換はシンプレクティック条件を満足する．いま(9－60c)式の変換が，シンプレクティック条件に従うならば，一般的変換(9－60a)もまた，シンプレクティック条件に従うことを示すことは容易である．

(9－60c)の型の正準変換に対して，シンプレクティック条件が実際に成り立つことを示すために，**無限小正準変換**(*infinitesimal canonical transformation*（略して，I．C．T))という概念を導入する．この概念は，広い範囲で有用であることがわかるであろう．無限小回転の場合におけるように，このような無限小変換は，新しい変数が元の変数と無限小量だけ異なっているような変換である．すべての計算で，これら無限小量の１次のオーダーのみが残される．変換方程式は，

$$Q_i = q_i + \delta q_i, \tag{9-61a}$$

$$P_i = p_i + \delta p_i, \tag{9-61b}$$

と書くことができる．または行列の形では，

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta}\,, \tag{9-61c}$$

と書かれる(ここで，δq_i と δp_i は仮想変位を表わすのでは**なく**，単に座標と運動量の無限小の変化を表わす)．したがって，無限小正準変換は，前節で論
p. 395
じた恒等変換から無限小だけ異なっている．母関数を用いる定式化では，I．C．T．に対する適当な母関数は，

$$F_2 = q_i P_i + \epsilon G(q, P, t), \tag{9-62}$$

である．ここで ϵ は変換に対するある無限小パラメーターであり，G は $2n$ 個の変数の任意の(微分可能な)関数である．(9－14a)によって，運動量に対

する変換式は，

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j},$$

あるいは，

$$\delta p_j \equiv P_j - p_j = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}, \qquad (9-63\text{a})$$

から見出されることになる．同じ様に，（9−17b）によって，Q_jに対する変換方程式は，

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_j},$$

によって決定される．第2項はすでに ϵ について1次であり，Pは pと無限小だけ異なっているので，1次のオーダーまでとるときには，導関数におけるP_jを p_jでおき換えることは差しつかえない．したがってGを q,p のみ（また，場合によっては t ）の関数と考えることができる．通常の慣例に従って，$G(q, p)$ を**無限小正準変換の母関数**と呼ぶことにしよう．厳密にいえば，この呼び方はFに対してのみ用いられるべきものであるけれども．したがって，Q_i に対する変換方程式は，

$$\delta q_j = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j}, \qquad (9-63\text{b})$$

と書くことができる．（9−36a，b）の両方の変換方程式は，組み合わせて，1つの行列方程式，

$$\delta \boldsymbol{\eta} = \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \qquad (9-63\text{c})$$

にまとめることができる．

無限小正準変換の明らかな例は，tが t_0と無限小量 dt だけ異なっているときの（9−60c）式の変換であり，

$$\boldsymbol{\zeta}(t_0) \to \boldsymbol{\zeta}(t_0 + dt), \qquad (9-64)$$

となる．このとき，dtが無限小パラメーター ϵに当たる．変換 $\boldsymbol{\zeta}(\eta, t)$ が $\boldsymbol{\zeta}(\eta,$

t_0) からの連続的な発展であるということは，$\boldsymbol{\zeta}(t_0) \rightarrow \boldsymbol{\zeta}(t)$ という変換が，dt きざみでのこのような I．C．T．が引き続き行われることによって作り上げられる，ということを意味する．したがって，無限小変換（9－64）式がシンプレクティック条件を満たすことを示すことで十分であろう．しかし，変換方程式（9－63）から，任意の I．C．T．の Jacobi の行列は，シンプレクティック行列であることを示すことができる．定義によって Jacobi の行列は，

$$\mathbf{M} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{1} + \frac{\partial \delta \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{\eta}},$$

あるいは，（9－63c）によって，

$$\mathbf{M} = \mathbf{1} + \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}}, \tag{9-65}$$

である．（9－65）式における2階の導関数は正方，対称行列で，その要素は，

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \right)_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial \eta_j},$$

である．**J** の反対称性のために，**M**の転置行列は，

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{1} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J}, \tag{9-66}$$

となる．シンプレクティック条件は，行列の積，

$$\mathbf{M J \widetilde{M}} = \left(\mathbf{1} + \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \right) \mathbf{J} \left(\mathbf{1} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \right),$$

を含んでいる．この積において，無限小の1次の項までを正しく取り出すと，

$$\begin{aligned} \mathbf{M J \widetilde{M}} &= \mathbf{J} + \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} - \mathbf{J} \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \\ &= \mathbf{J}, \end{aligned}$$

となる．したがって，任意の無限小正準変換に対して，シンプレクティック条件が成り立つことを示している．したがって，これまで述べてきた論拠をつなぎ合わせることによって，任意の正準変換は，パラメーターとして時間を含んでいてもいなくても，シンプレクティック条件（9－55）式または（9－58)式

に従うということが導かれる.

シンプレクティックな方法は，無限小正準変換を取り扱うときを除いては，母関数を用いる方法とはほとんど無関係に発展されてきたが，もちろんこの2つの方法には関係がある．われわれは，後で，1例としてシンプレクティック条件が母関数の存在を意味するということの証明の概略を述べることにしよう．しかしその結びつきは大抵は問題にならない．両方共，正準変換を調べる効果的な方法であり，かつ必要とされる変換のすべての性質を含んでいる．例えば，シンプレクティックな定式化および母関数による定式化はいずれも，正準変換が群を特徴づける，次の4つの性質を持つことを証明するのに用いることができる（演習問題13参照）．すなわち，

1. 恒等変換は正準変換である.
2. 1つの変換が正準変換ならば，その逆変換も正準変換である.
3. 2つの引き続く正準変換（“積”の演算）は，やはり正準変換である1つの変換を定義する.
4. 積の演算は結合的である.

p. 397
したがって，差し当りは，どちらがより簡単な取り扱いを与えるかによって，母関数による方法あるいはシンプレクティック変換による方法のどちらかを自由に用いることにしよう.

9−4　Poisson の括弧式およびその他の正準不変量

2つの関数 u, v の，正準変数 (q, p) に関する **Poisson の括弧式** (*Poisson bracket*) は，

$$[u, v]_{q,p} = \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}, \qquad (9-67)$$

によって定義される．この双1次形式は，Hamilton の方程式におけると同じように，典型的なシンプレクティック構造を持っている．すなわち q は p と結合し，p は $-q$ と結合している．従って，Poisson の括弧式は，容易に行列形式と適合させることができて，

$$[u,v]_\eta = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \qquad (9-68)$$

と書くことができる．転置記号が，右辺の最初の行列に用いられているが，これはこの行列が乗法において1つの1行行列として取り扱われなければならないことを示している．大抵の場合に，この特別な注意は必要がないであろうから，転置記号は省いてよい．

正準変数の組 (q,p) それ自身の中から，関数 u,v を選んでみよう．そのとき，(9－67) 式あるいは (9－68) 式の定義から，これらの Poisson の括弧式は，

$$[q_j, q_k]_{q,p} = 0 = [p_j, p_k]_{q,p},$$

および，　(9－69)

$$[q_j, p_k]_{q,p} = \delta_{jk} = -[p_j, q_k]_{q,p},$$

の値を持つことは明らかである．**正方行列の Poisson の括弧式** (*square matrix Poisson bracket*) $[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}]$ を導入することによって，(9－69) の関係式を1つの方程式にまとめることができる．ここで，$[\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}]$ の lm 要素は，$[\eta_l, \eta_m]$ である．そうすると，(9－69) 式は，

$$[\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}]_\eta = \mathbf{J}, \qquad (9-70)$$

と書くことができる．さて，u,v として変換式 (9－59) によって (q,p) を用いて定義された，変換された変数 (Q,P) すなわち $\boldsymbol{\zeta}$ の中からの組を取ることにしよう．これらの (Q,P) から作られたすべての Poisson の括弧式の全体は

$$[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}]_\eta = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\zeta}}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \boldsymbol{\eta}},$$

によって定義される Poisson 括弧式の行列を作っている．しかし，われわれは偏導関数は，変換の正方 Jacobi 行列を定義するということを知っている．したがって Poisson の括弧式の関係は，

$$[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}]_\eta = \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{J}\mathbf{M}, \qquad (9-71)$$

p. 398

と等価である．変換 $\boldsymbol{\eta}\rightarrow\boldsymbol{\zeta}$ が正準変換であるならば，シンプレクティック条件が成立し，(9−71)式は，

$$[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}]_{\eta} = \mathbf{J}, \tag{9−72}$$

に帰着される．逆に，もし(9−72)式が成り立つならば，その変換は正準変換である．

(9−70)式あるいは(9−72)式のような，正準変数それ自身の Poisson の括弧式は，**Poisson の基本括弧式**(*fundamental Poisson brackets*) と呼ばれる．(9−70)式から，

$$[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}]_{\zeta} = \mathbf{J}, \tag{9−73}$$

が得られるから，(9−72)式は，任意の正準座標の組に対して計算されたときに，ζ 変数の Poisson の基本括弧式が同じ値を持つということを述べている．すなわち，**正準変換の下で，Poisson の基本括弧式は不変である．** (9−71)式から，この不変性は変換がシンプレクティックであるための必要かつ十分な条件であることがわかった．したがって，Poisson の基本括弧式の不変性は，あらゆる点で正準変換に対するシンプレクティック条件と等価である．

さらに**すべての** Poisson の括弧式が正準変換の下で不変であることを示すには，そう多くの段階は必要でない．座標の組 $\boldsymbol{\eta}$ に関する2つの関数 u, v の Poisson の括弧式(9−68)を考えよう．(9−53)式のときと同様に，$\boldsymbol{\eta}$ に関する v の偏導関数は，$\boldsymbol{\zeta}$ に関する偏導関数によって，

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \widetilde{\mathbf{M}}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\zeta}},$$

と表わすことができる(すなわち，偏導関数は共変的に変換する)．同様にして，

$$\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \widetilde{\widetilde{\mathbf{M}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}}} = \frac{\widetilde{\partial u}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\mathbf{M},$$

と書くことができる．したがって，Poisson の括弧式(9−68)は，

$$[u, v]_{\eta} = \frac{\widetilde{\partial u}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\mathbf{J}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}}$$

$$= \frac{\widetilde{\partial u}}{\partial \zeta} \mathbf{M} \mathbf{J} \widetilde{\mathbf{M}} \frac{\partial v}{\partial \zeta} ,$$

と書ける．この変換が正準変換であるならば，（9－55）式の形のシンプレクティック条件が成立し，

$$[u, v]_{\eta} = \frac{\widetilde{\partial u}}{\partial \zeta} \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \equiv [u, v]_{\zeta} , \qquad (9-74)$$

が得られる．このようにして，Poisson の括弧式は，任意の正準変数の組について計算されたとき，同じ値を持っている **――すなわち，すべての Poisson の括弧式は正準不変量である．** Poisson の括弧式の記号を書くときに，今
R 399 までは，添字によって括弧式が定義される変数の組を示すように注意を払ってきた．われわれが正準変数のみを使う限り，このやり方はもう必要がないことがわかったから，今後は一般には添字を落とすことにしよう*．

正準変換の特徴は，Hamilton の運動方程式の形が，変換された後にも不変であるということである．同様に，Poisson の括弧式の正準不変性から，Poisson の括弧式で表わされた方程式は，正準変換に対して形を変えないということがいえる．後でわかるように，ハミルトニアンによる定式化と平行して，すべて Poisson の括弧式のみによって表わされた，古典力学の１つの構造を展開することができる．この Poisson の括弧式による定式化は，すべての正準変数に対して同じ形を持っており，古典力学から量子力学へ移行する場合に特に有用である．すなわち，この場合には，１つの簡単な“対応原理”（correspondence principle）があるが，それは，古典的な Poisson の括弧式を，対応する量子論的演算子の適当に定義された交換子で置き換えるべきであるということである．

それゆえ，Poisson の括弧式の代数的性質には大変興味がある．すでに，明らかな性質，

---

*）スケール変換，またはシンプレクティック条件が（9－56）式の形をとる広義の正準変換に対しては，Poisson の括弧式はすべての座標系において，同じ値を持た**ない**．このことは，考察することが役に立つ正準変換の類から，スケール変換を除いた理由の１つである．

$$[u, u] = 0 \,, \tag{9-75a}$$

（反対称性）：　$[u, v] = -[v, u]$ ，　　　(9−75b)

を用いた．次の特性，

（線型性）：　$[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w]$,　　　(9−75c)

および

$$[uv, w] = [u, w]v + u[v, w], \tag{9-75d}$$

は，上の性質と同じくらい明らかである．ここで a，b は定数である．他のもう１つの性質は，自明というわけにはいかないが，Poisson の括弧式の性質を定義するのに非常に重要である．それは，通常 **Jacobi の恒等式**（*Jacobi's identity*）の形で与えられる．すなわち，u, v および w が連続な２階の導関数を持つ３つの関数であるならば，

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0, \tag{9-75e}$$

が成り立つ，すなわち，３つの関数の２重 Poisson 括弧式の循環置換の和は零になるということを述べるものである．長い代数計算をしないで，Poisson の括弧式に対する Jacobi の恒等式を証明する簡単な方法はないように思われる．しかし，特別の記号を導入することによって，計算の繁雑さを和らげることはできる．u, v, w（またはそれらの関数）に添字をつけて，その添字に対応する正準変数に関する偏導関数を表わすことにしよう．すなわち，

$$u_i \equiv \frac{\partial u}{\partial \eta_i}, \qquad v_{ij} \equiv \frac{\partial v}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \,,$$

p. 400
とするのである．この記法では，u と v の Poisson の括弧式は，

$$[u, v] = u_i J_{ij} v_j \,,$$

のように表わされる．ここで J_{ij} は，いつものように，**J** の ij 要素である．この証明で必要となる **J** の唯一の性質はその反対称性である．さて，(9−75e) 式の１番目の２重 Poisson 括弧式は上の記法を用いると次のように書ける．

$$[u,[v,w]] = u_i J_{ij}[v,w]_j = u_i J_{ij}(v_k J_{kl} w_l)_j.$$

要素 J_{kl} は定数であるから，η に関する微分はこれに作用しないので，

$$[u,[v,w]] = u_i J_{ij}(v_k J_{kl} w_{lj} + v_{kj} J_{kl} w_l), \tag{9-76}$$

と書ける．他の２重 Poisson 括弧式は，（９－76）式から u, v, w の巡回置換によって得られる．したがって合計で６個の項があり，各項はダミー指標 i, j, k, l の４重の和である．w の２階導関数を含む（９－76）式の項，

$$J_{ij} J_{kl} u_i v_k w_{lj}\ ,$$

を考えよう．他には w の２階導関数は，（９－75e）式の中の第２番目の２重 Poisson 括弧式の計算の中にだけ現われる．すなわち，次のようになる．

$$[v,[w,u]] = v_k J_{kl}(w_j J_{ji} u_i)_l.$$

ここで，w についての２階の導関数の項は，

$$J_{ji} J_{kl} u_i v_k w_{jl}\ ,$$

である．微分の順序は問題にはならないから，$w_{lj} = w_{jl}$ であって，２つの項の和は，$\mathbf{J}$ の反対称性によって，

$$(J_{ij} + J_{ji}) J_{kl} u_i v_k w_{lj} = 0,$$

となる．残りの４つの項は巡回置換によって得られ，同様に，u の２階導関数を含むものと，v の２階導関数を含むものの２つの対に分けられる．同じ論法によって，これらの対の各々の和は零となり，したがって Jacobi の恒等式は証明される．

u, v の Poisson 括弧式が，２つの関数の“積”の演算を定義するものと考えるならば，Jacobi の恒等式は乗法の結合法則に代わるものである．通常の算法では乗法は，結合的である．すなわち，乗法はどこから行ってもよいから，

$$a(bc) = (ab)c\ ,$$

であることを思い出そう．Jacobi の恒等式は，括弧式の“積”が結合的では

ないことを表わしており，“乗法”の順序を変えたときの効果を与えている．（9－75b）と（9－75c）式の性質とを合わせて，（9－75c）式は，Poisson の括弧式によって満足される．結合法則に従わない，1つの特殊な型の代数を定義している．この代数は **Lie 代数**（（*Lie algebra*）と呼ばれる．p.401 Poisson の括弧式の演算は，Lie 代数に対する条件を満たす，物理学者にとってなじみ深い“積”の唯一の型ではない．2つのベクトルのベクトル積，

$${}_{V}[\mathbf{A},\mathbf{B}] \to \mathbf{A}\times\mathbf{B},$$

および，2つの行列の交換子，

$${}_{M}[\mathsf{A},\mathsf{B}] \to \mathsf{AB}-\mathsf{BA},$$

が，Poisson の括弧式と同じ Lie 代数の条件を満たすことは，演習問題として読者に残しておこう．この最後の関係が，古典的な Poisson の括弧式を量子力学的演算子の交換子によって置き換えることを可能にするのである．言い換えれば，Poisson の括弧式と交換子は，両方共 Lie 代数の“積”の表現であるという理由によって，初めて“対応原理”が適用され得るのである*．

Poisson の括弧式以外にも他の正準不変量がある．その1つは，今では主として歴史的な興味があるだけであるが，**Lagrange の括弧式**（*Lagrange bracket*）である．u と v を，正準変数の $2n$ 個の独立な関数の集合から取られた2つの関数であるとしよう．逆に解くことによって，正準変数はその $2n$ 個の関数の組の関数と考えることができる．このことに基づいて，変数（q, p）についての u，v の Lagrange の括弧式は，

$$\{u,v\}_{q,p}=\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v}-\frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial q_i}{\partial v}, \qquad (9-77)$$

---

*） もちろん，対応原理のこの説明を受け入れることと，その物理的な必然性とを間違えてはならない．量子論的交換関係を導入したことは，量子力学の開拓者たちによる物理的な発見の偉大な所産であった．われわれがここで示すことのすべては，古典力学の Poisson の括弧式による定式化と，量子力学の交換関係の形との間に数学的類似性があるということだけである．形式的な対応は，

$$[u,v]\to\frac{1}{i\hbar}(uv-vu),$$

である．ここで，左側の u, v は古典的な関数であり，右側の u, v は量子力学的演算子である．

で定義される．あるいは，行列の記法では，

$$\{u, v\}_\eta = \widetilde{\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial u}} \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v}\,, \tag{9-78}$$

と書かれる． Lagrange の括弧式の正準不変性の証明は， Poisson の括弧式に対する証明と平行に行われる．まず，変数 ζ に関する Lagrange の括弧式，

$$\{u, v\}_\zeta = \widetilde{\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial u}} \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial v}\,, \tag{9-79}$$

を作る．しかし，導関数は変数 η によって，

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial v} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial v}, \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial v} = \mathbf{M} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v}\,,$$

p. 402
で表わされる．そうすると，（ 9－79 ）式は，

$$\{u, v\}_\zeta = \widetilde{\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial u}} \widetilde{\mathbf{M}} \mathbf{J} \mathbf{M} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v},$$

と書くことができる．これは，正準変換式（ 9－58 ）のシンプレクティック条件によって，

$$\{u, v\}_\zeta = \widetilde{\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial u}} \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} = \{u, v\}_\eta\,,$$

となって， Lagrange の括弧式の正準不変性が証明される．

もし u と v が正準変数の中の２つであるとすれば， **Lagrange の基本括弧式**（ *fundamental Lagrange brackets* ），

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \tag{9-81}$$

あるいは行列の記法で書けば，

$$\{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\} = \mathbf{J}\,,$$

が得られる． Lagrange と Poisson の括弧式は，明らかに，お互いにある種の逆数的な関係になっているが，この関係の正確な形を表わすことはいくらか複雑である． $u_i, i = 1, \ldots, 2n$ を， 1 列（ または 1 行 ）行列 $\mathbf{u}$ によって表わされる，正準変数の $2n$ 個の独立な関数の集合であるとしよう．このとき，$\{\mathbf{u}, \mathbf{u}\}$

は $2n \times 2n$ 行列であって，その ij 要素は $\{u_i, u_j\}$ である．$[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$ に対しても同じように記述することができる．2つの括弧式の逆数的な性質は，関係式，

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{u}\}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = -\mathbf{1}, \tag{9-83}$$

によって明かに表わされるものである．u に対して，正準変数の組それ自身を選ぶならば，（9−83）式は明らかに基本括弧式（9−70）および（9−82）と $\mathbf{J}$ の性質から導かれる．任意の u についての証明は，括弧式の行列による定義を用いて書けば，むずかしくはないので，演習問題として残しておこう．

Lagrange と Poisson の括弧式の性質は，多くの点でお互いに類似しているが，Lagrange の括弧式は Jacobi の恒等式を満たさ**ない**ことには注意すべきである．したがって Lagrange の括弧式は Lie 代数の“積”の演算としての条件は満たしていない．

もう1つの重要な正準不変量は位相空間の体積要素の大きさである．正準変換 $\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\zeta}$ は，座標 η_i を持つ $2n$ 次元の位相空間を，座標 ζ_i を持つもう1つの位相空間へ変換する．体積要素，

$$(d\eta) = dq_1 dq_2 \ldots dq_n dp_1 \ldots dp_n,$$

は，新しい体積要素，

$$(d\zeta) = dQ_1 dQ_2 \ldots dQ_n dP_1 \ldots dP_n,$$

p. 403

に変換される．よく知られているように，2つの体積要素の大きさは，Jacobi の行列式（Jacobian determinant）の絶対値によって，

$$(d\zeta) = \|\mathbf{M}\|(d\eta), \tag{9-84}$$

のように関係づけられる.* しかし，シンプレクティック条件，（9−55）式の両辺の行列式をとれば，

$$|\mathbf{M}|^2|\mathbf{J}| = |\mathbf{J}|, \tag{9-85}$$

*）例えば，W. Kaplan, *Advanced Calculus, 2nd.* ed. 1973, p. 270 を見よ．

が得られる．したがって，実数の正準変換においては， Jacobi の行列式は±1であり，絶対値は常に1である．これから，位相空間における体積要素の正準不変性が証明されたことになる．また，位相空間における任意の領域の体積，

$$J_n = \int \dots \int (d\eta), \tag{9−86}$$

が正準不変量であることが導かれる．

（9−86）式の体積積分は，位相空間の異なった次元の部分空間についての積分から構成される， **Poincaré の積分不変量**（ *integral invariants of Poincaré* ）として知られる一連の正準不変量の最後のものである．これら一連の不変量の他のものは， J_n のように簡単に述べることはできないし，また理論をさらに展開するためには必要でないから，ここでは論じないことにしよう*．

最後に， Poisson の基本括弧式の不変性から，前節の終りで言及したように，シンプレクティック条件が母関数の存在を意味するということの証明の概略を述べることができる．話を簡単にするために，1つの自由度をもつ系のみを考えることにしよう．この証明の一般的な方法は，多くの自由度を持つ系に直ちに拡張することができる**．変換の方程式，

$$Q = Q(q, p), \qquad P = P(q, p),$$

の第1の式は逆に解くことができて，例えば p を，

$$p = \phi(q, Q)\,. \tag{9−87}$$

のように q と Q の関数として与えることができるとしよう．変換の第2の式へこの p を代入すれば，例えば P を，

$$P = \psi(q, Q), \tag{9−88}$$

---

*) 低次の積分不変量を通常の形で提示するには，いくつかの困難がある．この問題の解説については，H. D. Block, *Quarterly Applied Math.* **12**, 201 (1954) を見よ．

) 一般的な系についての証明の詳しいことは， C. Carathèodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, English translation, Holden-Day, 1965, Vol. 1, Sect. 97, pp. 87-90 を見よ．この文献では，シンプレクティックな方法と，母関数による定式化との間の関係は，時々 **Carathèodory の定理と呼ばれている．

p. 404
のように，qとQの関数として得ることができる．このような場合には，変換は第1種の母関数によって生成されることが期待され,* (9—87)式と(9--88)式は，

$$p=\frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial q},\qquad P=-\frac{\partial F_1}{\partial Q}(q,Q),\tag{9—89}$$

となる．もし(9—89)式が成り立つならば，

$$\frac{\partial\phi}{\partial Q}=-\frac{\partial\psi}{\partial q},\tag{9—90}$$

が成立するであろう．逆に，(9—90)式が成り立つことを示すことができれば，pとPが(9—89)式によって与えられるような1つの関数F_1が存在しなければならない．

(9—90)式の妥当性を示すために，すべての量を，qとQの関数とみなしてみることにしよう．そうすると，もちろん，

$$\frac{\partial Q}{\partial Q}=1,$$

という恒等式が成立する．てこで，(9—87)式を第1の変換式，

$$Q=Q(q,\phi(q,Q)),\tag{9—91}$$

に代入すると，偏導関数はまた，

$$\frac{\partial Q}{\partial Q}=\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial\phi}{\partial Q},$$

と書かれ，したがって関係式，

$$\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial\phi}{\partial Q}=1,\tag{9—92}$$

が得られる．同じような考え方で，Poissonの括弧式は次のように計算される．

---

*) もちろん，Qの変換式が，恒等変換におけるように，逆に解けないならば，そのときにはPの変換式を逆に解いて，第2種の母関数が得られる．

$$[Q,P] \equiv \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = 1.$$

Pの導関数は，　と$Q(q,p)$の関数と考えられたψの導関数であるから，Poisson の括弧式は，

$$[Q,P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial \psi}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q} + \frac{\partial \psi}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}\right).$$

と書くことができる．あるいは，項をまとめて，

$$[Q,P] = \frac{\partial \psi}{\partial Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}\right) - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial \psi}{\partial q},$$

p. 405
となる．したがって，

$$1 = -\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial \psi}{\partial q}, \qquad (9-93)$$

である．(9−92)式と(9−93)式とを結びつけて，

$$\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial Q} = -\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial \psi}{\partial q},$$

が得られる．pに関するQの偏導関数が，式の両辺において同じ，すなわち，一定に保たれる他の変数が両辺においてqであるから，またこの導関数は零にはならないから(そうでないとQの変換式は逆に解けない)，(9−90)式は正しくなければならないことが導かれる．したがって，すでに見たようなシンプレクティック条件と等価である，Poisson の基本括弧式 $[Q,P]$ の値から，母関数の存在が導かれる．ここでは独立に到達されたが，正準変換に導く2つの方法は全く同等である．

9−5　Poisson の括弧式を用いた定式化における運動方程式，無限小正準変換，および保存則

ハミルトニアン力学のほとんど全部の枠組は，Poissonの括弧式を用いて言い直すことができる．Poissonの括弧式の正準不変性の結果として，そのようにして得られた関係式は，また正準変換の下で形が不変になっているであろう．例えば，正準変数と時間のある関数 $u(q,p,t)$の，時間に関する全導関数を，

Hamiltonの運動方程式を用いて求めると，

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial u}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}+\frac{\partial u}{\partial t},$$

あるいは，

$$\frac{du}{dt}=[u,H]+\frac{\partial u}{\partial t}\ , \tag{9－94}$$

が得られる．シンプレクティック記法によれば，（９－94）式の導出は次のように行われる．すなわち，

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}\dot{\boldsymbol{\eta}}+\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}+\frac{\partial u}{\partial t},$$

となり，これから（９－68）式を用いて（９－94）式が導かれる．（９－94）式は，Poissonの括弧式を用いた定式化における，任意の関数uに対する，一般化された運動方程式とみなすことができる．これは，uに対して正準変数の１つを代入するとわかるように，特別な場合として Hamilton の方程式，

$$\dot{q}_i=[q_i,H],\qquad \dot{p}_i=[p_i,H], \tag{9－95a}$$

p. 406 または，シンプレクティック記法で，

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}=[\boldsymbol{\eta},H]\ , \tag{9－95b}$$

を含んでいる．（９－95）式が Hamilton の運動方程式と同じものであることは，Poissonの括弧式の定義，（９－68）式によって，

$$[\boldsymbol{\eta},H]=\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \tag{9－96}$$

が得られるということから直接わかる．すなわち（９－95b）式は，単に（８－31）式のもう１つ別の書き方にすぎないのである．また，もう１つの良く知られた性質が，uをH自身に等しいとおくことによって，（９－94）式から得られる．このとき，（９－94）式は，以前に（８－35）式で得られたように，

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t},$$

となる．一般化された運動方程式は正準不変であることに注意すべきである．

すなわち，関数 u を表わすために，または Poisson の括弧式を計算するために，正準変数 q, p のどのような組が用いられても，運動方程式は成立する．しかしながら，用いられるハミルトニアンは，用いられる正準変数の組に対して適当なものでなければならない．すなわち，時間に依存する正準変換によって，変数の他の組へ変換されるときには，変換されたハミルトニアン K に変えなければならない．

u が運動の定数であるならば，（9−94）式から，u は，

$$[H, u] = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (9-97)$$

という性質を持たなければならない．（9−97）式に従うすべての関数は運動の定数であり，また逆に H と任意の運動の定数との Poisson の括弧式は，定数である関数の時間に関する偏導関数に等しくなければならない．このようにして，系の運動の定数を探したり，またある量が確かに運動の定数であることを証明したりする，一般的な方法が得られた．時間を陽には含まない運動の定数に対しては，（9−97）式の判定基準は，ハミルトニアンとその量との Poisson括弧式が零になるということを要求することになる*.

もし，2つの運動の定数が知られるならば，Jacobi の恒等式から，さらに他の運動の定数を得るための可能な方法が与えられる．u と v を，時間を陽に含まない2つの運動の定数であるとしよう．このとき，（9−75e）の w を H と取るなら，Jacobi の恒等式から，

$$[H, [u, v]] = 0,$$

となる．すなわち，u と v との Poisson の括弧式はまた，時間に関して一定である．保存量が時間に陽に関係するときでさえ，ちょっとした代数計算をすることによって（演習問題 28 参照 p. 407），**任意の2つの運動の定数の Poisson の括弧式は，また運動の定数である**，ことを示すことができる（Poisson の定理）．このように Jacobi の恒等式を繰り返し適用することによって，原理的

---

*) 古典的な Poissonの括弧式と，量子論的な交換子の間の“対応原理”によれば，この命題は，保存量はハミルトニアンと可換であるという良く知られた量子論の定理に対応していることがわかる.

には，すべての運動の定数を求めることができる．しかしながら，甚だ多くの場合，この手続きは期待はずれになる．それは，u と v との Poisson の括弧式は，しばしば u と v 自身のわかりきった関数であるか，または恒等的に零となることがわかるからである．それでもやはり，Poisson の定理によって新しい，独立な運動の定数をつくり出す可能性があることは心に留めておくべきである．

Poisson の括弧式の記法は，無限小正準変換の基本方程式を定式化し直すのに使うことができる．上に論じたように（577ページ），そのような変換は1つのパラメーターの連続関数である変換の特別な場合である．この変換は，パラメーターのある初期値（その値は便宜上零に等しいとおいてよい）における恒等変換から出発するものである．パラメーターが1次の無限小量として取り扱ってよい程十分小さいならば，変換された正準変数は座標の初期値から無限小しか異ならない．すなわち，

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta}, \qquad (9\text{—}98)$$

である．ここで，変化量は（9—63c）式によって，母関数 G を用いて，

$$\delta\boldsymbol{\eta} = \epsilon \mathbf{J}\frac{\partial G(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}},$$

で与えられる．さて，Poisson の括弧式の定義（9—68）式から，

$$[\boldsymbol{\eta}, u] = \mathbf{J}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \qquad (9\text{—}99)$$

が導かれる（（9—96）式参照）．これは Poisson の括弧式を他の任意の正準変数を用いて計算するときに成り立つ関係式である．u を G ととると，無限小正準変換に対する変換式は，

$$\delta\boldsymbol{\eta} = \epsilon[\boldsymbol{\eta}, G], \qquad (9\text{—}100)$$

と書くことができる．

（シンプレクティック条件を証明するときに行ったように）連続なパラメーターを t とし，$\epsilon = dt$ であるような無限小正準変換を考えよう．そして，母関数 G がハミルトニアンであるとしよう．そうすると，無限小変換に対する変

換式は，（9－100）式から，

$$\delta\boldsymbol{\eta} = dt[\boldsymbol{\eta}, H] = \dot{\boldsymbol{\eta}}\,dt = d\boldsymbol{\eta}\ , \qquad (9-101)$$

となる．これらの式は，変換によって座標と運動量が，時刻 t における値から，$t+dt$ における値へと変わることを表わしている．したがって，時間間隔 dt における系の運動は，ハミルトニアンによって生成される無限小接触変換によって記述することができる．それに対応して，t_0 から t までの有限な時間間隔における系の運動は，一連の無限小接触変換によって表わすことができる．この一連の無限小接触変換は，すでに見たように，1つの単一の有限正準変換と p. 408 等価である．したがって，任意の時刻 t における q，p の値は，その初期値から，時間の連続関数である1つの正準変換によって，求めることができる．この見地からすれば，力学系の運動は，正準変換が連続的に行われる，あるいは繰り広げられることに対応する．全く文字通りの意味で，**ハミルトニアンは系の時間的運動の母関数**（ *generator* ）である．

逆に，時刻 t における座標と運動量の値を，一定の初期値に変換する正準変換が存在するにちがいない．そのような変換を求めることは，明らかに，系の運動の問題を解くことと等価である．この章の初めで指摘したように，力学の問題は結局，すべての運動量が運動の定数となるような正準変換を求める問題に引き直すことができる．ところが，上で行った考察によれば，力学の問題を解くもう1つの可能性があることがわかる．すなわち，それは，運動量と座標が**両方共**運動の定数になるような正準変換を用いる方法である．これら2つの可能性については，次の章で詳しく考察し，与えられた力学の問題に対して，どのようにして形式的な解を求めることができるかを示すことにしよう．

この議論の中で，暗黙のうちに，正準変換およびそれが引き起こす効果を眺める方法が変えられていた．正準変換の概念は，位相空間を特徴づけるために用いられた座標の変換として導入された．実質的には，座標 (q,p) を持つ1つの位相空間 η から，座標 (Q,P) をもつもう1つの位相空間 ζ へ移ったのである．与えられた時刻における系の状態が，一つの座標系における点 A によって記述

されるとすれば，それはまた変換された座標系における点A'によっても同じようによく記述することができるであろう（図9－1参照）．系の変数の任意の関数

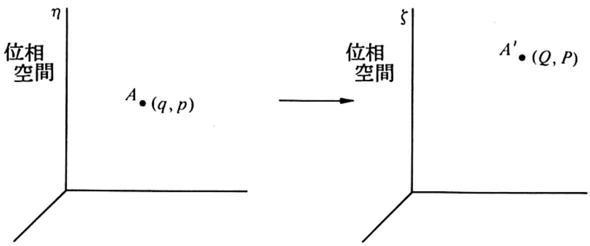


図9—1
正準変換の受動的な見方を示す.

は，それが (q,p) の組あるいは (Q,P) の組のどちらで記述されていようと，与えられた系の配置に対しては同じ値を持っているであろう．言い換えれば，この関数は A と A' において同じ値をもつであろう．直交変換における対応する記述の場合との類似から，これを正準変換の**受動的な**見方（passive view）と呼ぶことができる．

上に述べたことと対照的に，ハミルトニアンによって生成される正準変換は，位相空間の中の1点の座標と，**同じ**位相空間の中でのもう1つの点の座標とを関係づけるものとして語られてきた．この見地に立つと，正準変換は，数学者
p. 409 の言葉でいう，位相空間の点のそれ自身の上への写像を行っていることになる．それは実質的には，系の代表点を，位相空間における座標 (q,p) を持つ1つの位置から他の点 (Q,P) へ“動かす”ものとしての正準変換の**能動的な**（active）解釈を与える（図9－2参照）．もちろん，正準変換それ自身は，系の配置を移動あるいは変化させることはできない．正準変換を行うことは，系の1つの配置をもう1つの別の配置によって表わすことである．ある種の正準変換に対しては，能動的な見方は役に立たない．例えば，直交座標から球面極座標への点変換は，正準変換ではあるが，正準変換の“能動的”解釈はほとんどばかげたものであると言ってよいであろう．

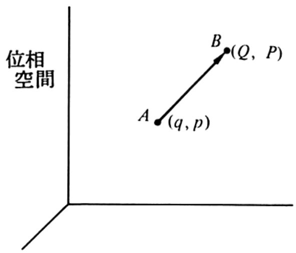


図9－2
正準変換の能動的な見方を示す.

能動的な見方は，連続的に1つのパラメーターに依存する変換に対して特に有用である．能動的な解釈においては，変換の働きは，パラメーターが連続的に変化するとき，位相空間の中の1つの曲線上で系の代表点を“連続的に動かす”ことである．対応した無限小正準変換（I．C．T．）の母関数がハミルトニアンであるとき，系の代表点がその上を動く曲線は，位相空間の中の系の軌道である．

正準変換を受動的な見方で考えると，“正準変換の下での関数 u の変化”という言いまわしは無意味である．関数 u の値は，それを A で求めようと A' で求めようと変わらない．一般に u は (q,p) に対する関数依存性とは異なった (Q,P) についての関数依存性を持っているのは事実であるが，その値は，対応する点では同じである．すなわち $u(A')=u(A)$ である．しかし，正準変換を“能動的に”考えるなら，“正準変換の下での関数 u の変化”という言いまわしに意味を与えることができる．例えば，それは系の点がAから B へ動くとき，その関数 u の値（*value*）の変化を意味するものと考えることができる．同じ位相空間内の点 B において u が (Q,P) について持っている関数関係は，点 A において u が (q,p) について持っている関数関係と同じではあるが，しかし今度は関数の値は一般に異なっているであろう．無限小正準変換の下での関数の値のそのような変化を表わすのに，ここでは記号 ∂ を使うことにしよう．

$$\partial u = u(B) - u(A)\,. \tag{9－102}$$

ここで，もちろん A と B とは無限に接近している．正準変数に対して行列記法を用いれば，無限小正準変換の下での関数値の変化は，

$$\partial u = u(\boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta}) - u(\boldsymbol{\eta})\,,$$

p. 410
で定義される．Taylor 級数に展開して，無限小量の1次のオーダーの項まで

とると，（9—63c）によって，

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}\ \delta\boldsymbol{\eta} = \epsilon \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\eta}}\ ,$$

が得られる． Poissonの括弧式の定義，（9—68）式を思い出せば，この変化は，

$$\partial u = \epsilon[\mathrm{u}, G]\ , \qquad (9-103)$$

と書くことができることがわかる．（9—103）式を直接適用するために， uとして位相空間の座標自身の1つ（または座標の行列）を取ってみれば，（9—100）式によって，

$$\partial \boldsymbol{\eta} = \epsilon[\boldsymbol{\eta}, G] = \delta\boldsymbol{\eta}\ ,$$

が得られる．この結果は，点Aに対する点Bの定義から明らかである．すなわち，AからBへの座標の“変化”は，まさに元の座標と新しい座標との無限小の差である．

これらの考察は，“ハミルトニアンの変化”について論ずるときには，いくらか一般化しなければならない．“ハミルトニアン”という言葉は，すべての座標系で同じである1つの特定の関数を意味するものではない，ということを思い出さなければならない．むしろそれは，与えられた位相空間において，運動の正準方程式を定義する関数をいうのである．正準変換が時間に依存するときには，“ハミルトニアン”の意味そのものも変わってくる．すなわち，$H(A)$が $H(A')$ ではなく $K(A')$ に移るのであり， $H(A)$は必ずしも $K(A')$ と同じ値を持たないであろう．そのような場合に， ∂H は実質的には，2つの解釈の下でのハミルトニアンの値の差，すなわち，

$$\partial H = H(B) - K(A'), \qquad (9-104)$$

を意味するものとしよう．関数それ自身が正準変換の下で変化しないときには，その変化に対する2つの形，（9—102）式と（9—104）式は， $u(A') = u(A)$ であるから，同じである．一般にKはHと，

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t},$$

によって関係づけられる．ここで，無限小正準変換に対しては，母関数は G を用いて（9−62）式で与えられる．（9−62）式では G だけが時間を陽に含む関数であるから，新しいハミルトニアンは，

$$K(A') = H(A') + \epsilon\frac{\partial G}{\partial t} = H(A) + \epsilon\frac{\partial G}{\partial t},$$

によって与えられ，ハミルトニアンの変化は，

$$\partial H = H(B) - H(A) - \epsilon\frac{\partial G}{\partial t}, \qquad (9-105)$$

p. 411
となる．（9−103）式から出発した筋道に従って，∂H は，

$$\partial H = \epsilon[H, G] - \epsilon\frac{\partial G}{\partial t}, \qquad (9-106)$$

で与えられることがわかる．u として G をとった一般化された運動方程式（9−94）および（9−106）式から，最終的に，H の変化は，

$$\partial H = -\epsilon\frac{dG}{dt}, \qquad (9-107)$$

であることが導かれる．

もし G が運動の定数であるならば，（9−107）式は，それがハミルトニアンの値を変えないようなある無限小正準変換を引き起こすことを示している．このことは，次のように言い表わしても同じことである．すなわち**運動の定数はハミルトニアンを不変にするような 無限小正準変換の母関数である**．この結論の中には，時間を陽に含まない運動の定数に対して最も簡単に知ることができる，系の対称性と保存量との一つの関係が含まれてくる．このときにはこの変換の下でのハミルトニアンの変化は，単に系が配置 A から配置 B へ動くときのハミルトニアンの値の変化である．もし，配置のこの変化を生じさせる操作の下で，系が対称であるならば，対応する変換の下でハミルトニアンは明らかに影響を受けない．このような場合の，簡単な例は次のようなものである．すなわち，系が１つの与えられた方向のまわりに対称であるならば，

ハミルトニアンは，系が全体としてその方向のまわりに回転されるときに，値を変えないであろう．したがって，このときには，系にこのような回転を（１つの無限小正準変換によって）生じさせる量が保存されなければならないことが導かれる．このように，系の回転対称性は，それに特有な運動の定数があることを意味する．運動の定数と対称性の関係の例は，これが初めてではない．われわれは前に（第２－６節，第８－２節），一般化運動量の保存則に関連して，このような例に出会った．しかし，ここではこの定理はもっと一層すっきりとしており，また完全である．なぜなら，この定理は，保存される一般化運動量に限らず，すべての独立な運動の定数の場合を含んでいるからである．

運動量の保存則は，今ではこの一般的な命題の１つの特別な場合とみなされる．１つの座標 q_i がサイクリックであれば，ハミルトニアンは q_i を含まず，したがって q_i だけの変位に対応する無限小変換に対しては，Hは確かに不変である．いま，q_i に共役な一般化運動量によって生成される１つの変換を考えよう．このときには，

$$G(q,p) = p_i\ , \qquad (9-108)$$

である．（９－63ａ，ｂ）式によって，このときに得られる無限小正準変換は，

$$\begin{aligned}\delta q_j &= \epsilon\delta_{ij},\\ \delta p_i &= 0\,,\end{aligned} \qquad (9-109)$$

である．すなわち，まさに要求されたように q_i の，そして q_i だけの無限小変位である．これが，ある座標がサイクリックであるならば，それに共役な運
p. 412
動量は運動の定数であるという良く知られた運動量の保存則であることは明らかであろう．１つの座標だけの変位が，それに共役な運動量によって生成されるという観察は，いくらか拡張された形に述べることができる．もし，無限小正準変換の母関数が，

$$G = (\mathbf{J}\boldsymbol{\eta})_l = J_{lr}\eta_r, \qquad (9-110)$$

によって与えられるならば，（９－63ｃ）式から得られる変換式は，

$$\delta\eta_k = \epsilon J_{ks}\frac{\partial G}{\partial\eta_s} = \epsilon J_{ks}J_{lr}\delta_{rs} = \epsilon J_{ks}J_{ls} \ ,$$

のようになる．**J** の直交性のために，これは，

$$\delta\eta_k = \epsilon\delta_{kl}, \qquad (9-111)$$

となる．すなわち，任意の正準変数 η_l だけの変位は，(9−110) 式によって与えられる形のそれに共役な変数によって生成される．もちろん，η_l が q_i であるならば，(9−110) 式から G はちょうど p_i であり，η_l が p_i であるならば，そのとき G は $-q_i$ である．

このような考え方を特定の例について示すために，系全体に角 $d\theta$ だけの回転を引き起こすような，力学変数の無限小接触変換を考えよう．この変換の母関数の物理的意味は，最初にとる正準座標の選び方に関係するはずはないので，[*] 当面の目的のためには，系を構成するすべての粒子の直交座標を用いるのが便利である．そして，この無限小回転の軸を，z 軸方向にとっても一般性は少しも失なわれないであろう．各粒子の反時計まわりの無限小回転に対して，位置ベクトルの変化は，(4−105′) 式 (174 ページ) の無限小回転行列から見出される．z 軸のまわりの回転だけを行ったときには，質点の座標の変化は，

$$\delta x_i = -y_i\,d\theta, \qquad \delta y_i = x_i\,d\theta, \qquad \delta z_i = 0\,, \qquad (9-112a)$$

で与えられる．同じように，質点の座標に共役な運動量によってつくられる，直交座標系でのベクトルの成分に対する変換の効果は，

$$\delta p_{ix} = -p_{iy}\,d\theta, \qquad \delta p_{iy} = p_{ix}\,d\theta, \qquad \delta p_{iz} = 0\,, \qquad (9-112b)$$

によって与えられる．これらの変換式を (9−63a，b) の式と比較すると，対応する母関数は，$d\theta$ を無限小のパラメーター ϵ とみなして，

$$G = x_i p_{iy} - y_i p_{ix}, \qquad (9-113)$$

で与えられることがわかる．これが母関数であることを直接確かめてみるため

---

*) このことは，正準不変な式 (9−100) から最も容易にわかるであろう．正準変数 η_i の変化は，G がどのような正準変数の組で表わされても，同じである．

には，

$$\delta x_i = d\theta \frac{\partial G}{\partial p_{ix}} = -y_i\, d\theta, \qquad \delta p_{ix} = -d\theta \frac{\partial G}{\partial x_i} = -p_{iy}\, d\theta,$$

$$\delta y_i = d\theta \frac{\partial G}{\partial p_{iy}} = x_i\, d\theta, \qquad \delta p_{iy} = -d\theta \frac{\partial G}{\partial y_i} = p_{ix}\, d\theta,$$

p. 413
が（9－112）式と一致することに注意すればよい．その上，母関数（9－113）は，全正準角運動量の z 成分という物理的意味を持っている．すなわち，

$$G = L_z \equiv (r_i \times p_i)_z\ , \qquad (9-114)$$

である．z 軸は任意に選べるのであるから，次のように言うことができる．すなわちある軸のまわりの無限小回転に対応する母関数は，回転軸の方向の単位ベクトルを $\mathbf{n}$ として，

$$G = \mathbf{L}\cdot\mathbf{n}\ , \qquad (9-115)$$

で与えられる．

ここで定義された正準角運動量は，力学的角運動量と異なっているかもしれないということに注意しなければならない．系に働らく力が，速度に依存するポテンシャルから導かれるならば，正準運動量ベクトル $\mathbf{p}_i$ は線運動量ベクトルと必ずしも同じではなく，（9－114）式と（9－115）式の $\mathbf{L}$ は，力学的角運動量と同じではないかもしれない．したがって，ここで得られた結果は，ある回転座標に共役な運動量は，全角運動量のそれに対応する成分である，という第2－6節で与えられた結論の一般化である．そこで与えられた証明は，速度に依存しないポテンシャルを持つ系に限られていた．ここではわれわれは，（9－108）式と（9－109）式によって，次のように結論することができる．1つの軸 $\mathbf{n}$ のまわりの系の全体としての回転を表わす一般化座標に共役な運動量は，その軸の方向の全正準角運動量の成分である．ハミルトニアンが，系の時間的な変位を引き起こす母関数であったのと全く同じように，角運動量は，系の空間回転を生じさせる母関数である．

すでに注意したように，“能動的な”解釈においては，1つのパラメーターに依存する正準変換は，位相空間内の連続な軌道に沿って，系の代表点を“動

かす”ものである．有限な変換は，無限小正準変換が無限に引き続いて起こったものの総和と見なすことができ，その無限小正準変換の各々は，その曲線に沿っての無限小変位に対応しているということも述べた．したがって，形式的には，無限小変位に対する式を積分することによって，有限な変換を得ることができるはずである．このことは，1つのパラメーターを αとすると，$\alpha=0$ で表わされる系の最初の配置から出発して，位相空間内の軌道の各点が α のある特定の値に対応することに注意すれば実行できる．u が系の配置のある関数であるならば，u は初期値 $u_0=u(0)$ を持つ，軌道に沿っての α のある連続関数 $u(\alpha)$ である（簡単のために，u は時間を陽に含まないものと考える）．軌道上の u の無限小変位に対する（9－103）式は，

$$\partial u = d\alpha[u, G],$$

と書くことができる．あるいは，変数 α に関する微分方程式として，

$$\frac{du}{d\alpha}=[u, G], \tag{9－116}$$

p. 414
と表わすことができる．この微分方程式を積分することによって $u(\alpha)$ を，したがって，有限な正準変換の効果を求めることができる．$u(\alpha)$ を，初期条件のまわりの Taylor 級数に展開することによって，次のようにして形式的な解を得ることができる．

$$u(\alpha)=u_0+\alpha\frac{du}{d\alpha}\bigg|_0+\frac{\alpha^2}{2!}\frac{d^2u}{d\alpha^2}\bigg|_0+\frac{u^3}{3!}\frac{d^3u}{d\alpha^3}\bigg|_0+\cdots.$$

（9－116）式によって，

$$\frac{du}{d\alpha}\bigg|_0=[u, G]_0,$$

が得られる．添字零は，Poisson の括弧式の値が最初の点 $\alpha=0$ でとられるべきことを意味する．$[u, G]$ 自身を系の配置の関数と考えて，（9－116）式を繰り返し適用すれば，

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2}=[[u, G], G],$$

が与えられる．この手続きは繰り返して用いることができて，uの3階あるいはそれ以上の階数の導関数が求められる．したがって，$u(\alpha)$に対するTaylor級数は，形式的な級数解，

$$u(\alpha) = u_0 + \alpha[u, G]_0 + \frac{\alpha^2}{2!}[[u, G], G]_0 + \frac{\alpha^3}{3!}[[[u, G], G], G]_0 + \cdots. \quad (9-117)$$

に導く．uとして任意の正準変数 ζ_i をとれば，そのときには u_0 がはじめの変数の組 ζ_i であるが，(9−117)式は，Gによって生成される有限な正準変換の変換式を見出すための1つの処方である．

この手順が実際に使えることを示す特定の例を見出すことは難かしくない．Gとして L_z をとってみよう．したがって最終的な正準変換は，z軸のまわりの有限な回転に対応する．αとして用いられる自然なパラメーターは回転角である．uとしては，系のi番目の粒子のx座標を取ることにしよう．Poissonの括弧式を直接計算するか，あるいは(9−112a)式からの推論によって，

$$[X_i, L_z] = -Y_i, \qquad [Y_i, L_z] = X_i, \quad (9-118)$$

であることは容易にわかる．ここで，最終座標である，角θの回転の後の座標を示すために大文字が使ってある．回転前の最初の座標は，通常の通り小文字で表わされる．そうすると，

$$\begin{aligned} [X_i, L_z]_0 &= -y_i, \\ [[X_i, L_z], L_z]_0 &= -[Y_i, L_z]_0 = -x_i, \\ [[[X_i, L_z], L_z], L_z]_0 &= -[X_i, L_z]_0 = y_i, \end{aligned}$$

p. 415
等が導かれる．このようにして，X_i に対する級数表示は，

$$\begin{aligned} X_i &= x_i - y_i\theta - x_i\frac{\theta^2}{2} + y_i\frac{\theta^3}{3!} + x_i\frac{\theta^4}{4!} - \cdots \\ &= x_i\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) - y_i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right), \end{aligned}$$

となる．2つの級数は，それぞれ余弦関数と正弦関数の展開であることがわか

る．それゆえ，X_i の有限な変換の方程式は，

$$X_i = x_i \cos\theta - y_i \sin\theta,$$

であってこれはまさに z 軸のまわりの，ベクトルの反時計まわりの回転に対して予期されるものである．

もう 1 つの例として，$G = H$ であり，パラメーターが時間である場合を考えよう．このとき，（9−116）式は u に対する運動方程式，

$$\frac{du}{dt} = [u, H],$$

に帰着される．この方程式の形式的な解は，

$$u(t) = u_0 + t[u, H]_0 + \frac{t^2}{2!}[[u, H], H]_0 + \frac{t^3}{3!}[[[u, H], H], H]_0 + \cdots, \qquad (9-119)$$

である．ここで添字の零は，$t = 0$ における初期条件を示している．このやり方を，一定の加速度　を持つ 1 次元運動という簡単な問題に適用しよう．この場合，ハミルトニアンは，

$$H = \frac{p^2}{2m} - max,$$

であって，u は位置座標 x である．（9−119）式で必要となる Poisson の括弧式は，直接に，または基本括弧式から容易に計算されて次のようになる．

$$[x, H] = \frac{p}{m},$$

$$[[x, H], H] = \frac{1}{m}[p, H] = a.$$

この最後の Poisson の括弧式は定数であるから，すべての高次の括弧式は零となり，級数は途中で切れて，完全な解は，

$$x = x_0 + \frac{p_0 t}{m} + \frac{at^2}{2},$$

によって与えられる．$p_0/m = v_0$ であることを思い出せば，これは，この問題

に対するよく知られた初等的な解であることがわかる．

p. 416
ここでわれわれの行ったことは，１つの**離れわざ**（ *tour de force* ）であって，名演奏家の演奏にすぎないように感じられるかもしれない．そのような不服に対しては次のように答えればよい．力学における現実の問題を解くのに，（９－119）式の級数解を，好ましい方法として提案しようというのではない．それは確かに，大学の初年級のための物理における最もやさしい問題を解くために想像し得る，最もわかりにくい方法の１つである！それにもかかわらず，この技巧は，正準変換の理論に基づく古典力学の構造に見通しを与える．この級数展開は，無限小正準変換が，１つのパラメーターに依存する有限な正準変換を生成することを示しており，したがって運動方程式の解に導くということを直接的に示している．古典力学と量子力学との間の関係に対して，特に興味があるのは，（９－117）式または（９－119）式の級数が，指数関数に対する級数とよく似ているという観察である．第 n 項の Poisson の括弧式の入れ子は，演算子 $[\ ,G]$ を（右から！）n 回繰り返し適用したもの，すなわち演算子の n 次のべきと考えられる．例えば，（９－119）式は，記号的に，

$$u(t) = ue^{\hat{\mathbf{H}}t}\Big|_0 , \qquad (9-120)$$

と書くことができる．この式における指数関数は，その級数表示を意味するものにほかならず，記号 $\hat{\mathbf{H}}$ は演算子 $[\ ,H]$ を示すのに用いられている．ここでわれわれが得たことは，量子力学における Heisenberg 描像を直ちに思い出させる.* その描像では，$u(t)$ は時間的に変化する演算子になり，その時間依存性は，同じ運動方程式（９－94）へ導くような具合に，$\exp[iHt/\hbar]$ によって与えられるのである（付加的な因子 $i/\hbar$ は，古典的な Poisson の括弧式と量子論的な交換子との対応からでてくる）．このように，力学の Poisson の括弧式による定式化は，量子力学の Heisenberg 描像の古典論において対応するものとなっている．

---

*）例えば，Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd. ed., 1968, pp. 170-171またはMerzbacher, *Quantum Mechanics*, 1961, pp. 343-349. を見よ．

9－6　角運動量を含む Poisson の括弧式

正準角運動量が系の剛体的な回転の母関数であるということから，そのPoisson の括弧式に関して多くの非常に興味のある，また非常に重要な関係式が導かれる．（“能動的な”見方に基づく）関数 u の無限小正準変換の下での変化に対する（9－103）式は，u を通常の空間における**固定**軸に沿うあるベクトルの成分と考えてもやはり成立する．したがって，**F**を系の配置のベクトル関数であるとするならば，

$$\partial F_i = [F_i, G],$$

である．成分をとる方向は，固定されていなければならない，すなわち正準変換によって影響されてはならないということは重要である．その方向自身が系の変数によって決められるとすると，変換は関数の値を変えるだけではなく，ハミルトニアンについてそうであったように，関数の性質をも変えることにな
p.417 る．このことが理解されれば，$\mathbf{L}\cdot\mathbf{n}$ で生成される，固定軸 $\mathbf{n}$ のまわりの系の回転の下でのベクトル**F**の変化は，ベクトル記法で，

$$\partial \mathbf{F} = d\theta[\mathbf{F}, \mathbf{L}\cdot\mathbf{n}], \qquad (9-121)$$

と書くことができる．言い換えると，（9－121）式は，**F**に対する基底の組を作る単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ それ自身は，$\mathbf{L}\cdot\mathbf{n}$ によって回転されないことを意味している．

（9－121）式の意味することを記述する言葉を注意深く選ばなければならない理由は他にもある．述べられているのは，必ずしもベクトル**F**の回転ではなく，無限小正準変換の下での系の回転である．母関数 $\mathbf{L}\cdot\mathbf{n}$ は，例えば磁場や重力の加速度のような外部ベクトルの回転ではなく，空間的な回転の下での系の変数の変換を引き起こすのである．このとき，どのような条件の下で $\mathbf{L}\cdot\mathbf{n}$ は**F**の空間的回転を生じさせるのであろうか？答は明らかである——**F**が系の変数 (q, p) のみの関数であって，無限小正準変換によって影響を受けない，いかなる外部的な量あるいはベクトルも含まないときである．このような条件が成り立つときにのみ，空間的回転は**F**の対応する回転を意味する．この

ようなベクトルを**系のベクトル**（*system vectors*.）と呼ぶことにしよう．

1つの軸$\mathbf{n}$のまわりの無限小回転の下でのベクトルの変化は，今までに何度か与えられている（（2−50）式および226ページの（4−111′)式を参照せよ）．すなわち，それは，

$$d\mathbf{F} = \mathbf{n}\,d\theta \times \mathbf{F}\,,$$

で与えられる．それゆえ，$\mathbf{L}\cdot\mathbf{n}$によって生成される無限小正準変換の下で引き起こされる変化は，1つの系のベクトル$\mathbf{F}$に対して，

$$\partial\mathbf{F} = d\theta[\mathbf{F},\mathbf{L}\cdot\mathbf{n}] = \mathbf{n}\,d\theta \times \mathbf{F}\,, \tag{9−122}$$

と書くことができる．（9−122）式は，すべての系のベクトルに対して，

$$[\mathbf{F},\mathbf{L}\cdot\mathbf{n}] = \mathbf{n} \times \mathbf{F}\,, \tag{9−123}$$

という重要なPoissonの括弧式の恒等式が成立することを意味する．（9−123）式においては，もはや正準変換はもちろん，空間的回転も引き合いに出されていないことに注意しよう．それは単に，ある特定の類に属するベクトルに対するある種のPoissonの括弧式の値について述べているだけであって，それ自体は，任意の与えられた場合に対して直接計算することによって確かめることができる．例えば，拘束を受けない粒子の系があるとし，正準空間座標として直交座標を用いると仮定しよう．そのとき，直交座標系におけるベクトル$\mathbf{p}$は，確かに適当な系のベクトルである．$\mathbf{n}$をz方向の単位ベクトルにとると，直接計算によって，

$$[p_x, xp_y - yp_x] = -p_y,$$
$$[p_y, xp_y - yp_x] = p_x,$$
$$[p_z, xp_y - yp_x] = 0\,,$$

が得られる．これらの恒等式の右辺は，（9−123）式によって予言されるように，明らかに$\mathbf{k}\times\mathbf{p}$の成分と同じである．他方，同じ問題において，$\mathbf{F}$としてベクトル$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}\times\mathbf{B})$を用いようと試みたと仮定しよう．ここに$\mathbf{B} = B\mathbf{i}$は$x$軸に沿う固定されたベクトルである．$\mathbf{A}$は，$x$方向にかけられた一様な磁場

p. 418

$\mathbf{B}$に対するベクトル・ポテンシャルであることがわかるであろう．$\mathbf{A}$は系に対

する外部のベクトルに依存するから，系のベクトルがもつ特徴には適合しないことが予期される．したがってAに対しては（9－123）式は成立しないであろう．実際，このときには含まれている Poisson の括弧式は，

$$[0, xp_y - yp_x] = 0,$$
$$[\tfrac{1}{2}zB, xp_y - yp_x] = 0,$$
$$[-\tfrac{1}{2}yB, xp_y - yp_x] = -\tfrac{1}{2}Bx,$$

となるが，ベクトル $\mathbf{k}\times\mathbf{A}$ はその代わりに成分 $(-\frac{1}{2}Bz, 0, 0)$ を持っている．

関係式（9－123）は，いろいろな記法で表わすことができる．例えば，ダイアディック記号では，

$$[\mathbf{F}, \mathbf{L}] = -\mathbf{F}\times\mathbf{1}\,, \tag{9－124}$$

のように表わされる．ここで $\mathbf{1}$ は単位ダイアディック $\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk}$ である．両辺で，右から $\mathbf{n}$ とのスカラー積をとることによって，（9－124）式は直ちに（9－123）式になる．もっと有用なのは，ベクトル積を表わすのに Levi-Civita の密度を用いる形である（225 ページ（4－113′）式参照）．任意の $\mathbf{n}$ に対して（9－123）式の i 番目の成分は，

$$[F_i, L_j n_j] = \epsilon_{ijk} n_j F_k,$$

と書くことができ，これから簡単な結果，

$$[F_i, L_j] = \epsilon_{ijk} F_k, \tag{9－125}$$

が得られる．（9－125）式のもう1つの表わし方は，l, m, n がサイクリックな順序である3つの指標とすると，

$$[F_l, L_m] = F_n, \qquad l, m, n \text{ はサイクリックな順序}, \tag{9－125′}$$

とすることである．

（9－123）式のもう1つの結果は，2つの系のベクトルのスカラー積 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$ に関係するものである．そのようなスカラー積はスカラーであるから，回転に対して不変でなければならない．そして実際，スカラー積 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$ と $\mathbf{L}\cdot\mathbf{n}$ との

Poisson 括弧式は零になることが次のように容易に示される．

$$\begin{aligned}[\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}, \mathbf{L}\cdot\mathbf{n}] &= \mathbf{F}\cdot[\mathbf{G}, \mathbf{L}\cdot\mathbf{n}] + \mathbf{G}\cdot[\mathbf{F}, \mathbf{L}\cdot\mathbf{n}] \\ &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{G} + \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{G} + \mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\times\mathbf{n} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{9-126}$$

したがって，任意の系のベクトルの大きさと，$\mathbf{L}$の任意の成分との Poisson の括弧式は零になる．

これらの結果の最も頻繁な応用は，$\mathbf{F}$をベクトル$\mathbf{L}$自身にとることから生ずる．そのときには，

$$[\mathbf{L}, \mathbf{L}\cdot\mathbf{n}] = \mathbf{n}\times\mathbf{L}, \tag{9-127}$$

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}L_k, \tag{9-128}$$

p. 419
および，

$$[L^2, \mathbf{L}\cdot\mathbf{n}] = 0\,, \tag{9-129}$$

が得られる．多くの興味ある結果が，(9−127) から (9−129) までの式から導かれる． L_xと L_y が運動の定数であるならば， Poissonの定理から， $[L_x, L_y] = L_z$ もまた運動の定数であることがわかる．したがって，角運動量のどれか２つの成分が一定であるなら，全角運動量ベクトルは保存される．もう１つの例として， L_xと L_y が保存されるということに加えて，運動の定数である成分 p_z を持つ，正準運動量の直交座標系におけるベクトル $\mathbf{p}$があると仮定しよう．そのときには， L_zが保存されるだけでなく，さらに２つの運動の定数がある．すなわち，

$$[p_z, L_x] = p_y \quad ,$$

および，

$$[p_z, L_y] = -p_x,$$

である．すなわち，$\mathbf{L}$と$\mathbf{p}$の両方が保存される．ここで， Poissonの定理が新しい運動の定数を与える例が得られたことになる．しかしながら， p_x, p_yと

L_z が与えられた運動の定数であるとすると，それらの Poisson の括弧式は，

$$[p_x, p_y] = 0,$$
$$[p_x, L_z] = -\ p_y,$$
$$[p_y, L_z] = p_x;$$

となることに注意しよう．この場合には， Poisson の定理から新しい運動の定数は得られない．

Poisson の基本括弧式（9－69）式から，任意の２つの正準運動量の Poisson の括弧式は零でなければならないことが思い出されるであろう．しかし，（9－128）式から， L_i と $\mathbf{L}$ の他の任意の成分との Poisson 括弧式は零にはならない．したがって， $\mathbf{L}$ を $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ （すべての粒子について和をとった）とする定義から，全正準角運動量と呼んだのであるが， $\mathbf{L}$ の２つの成分は同時に正準変数であることはできない．しかしながら，（9－129）式から，$\mathbf{L}$ の成分の任意の１つとその大きさ L は，同時に正準変数であるように選ぶことができる*.

9－7　力学系の対称性の群**

正準変換は群をつくるということはすでに指摘した．連続なパラメーターの解析関数である正準変換は，それだけで Lie 群として知られている類に属する独自の群をつくっている．例えば，系の空間的な回転に対応する正準変換は，３個のパラメーター，例えば回転の Euler の角，を持つ１つの群をつくって

*）前に注意したように，量子力学と古典力学との対応は， $\hbar \to 0$ の極限において，量子力学の交換子が，本質的には古典的な Poisson の括弧式に置き換えられるようなものである．量子力学の形式的な構造の多くは，古典力学の Poisson の括弧式による定式化の忠実なひき写しのように見える．それゆえ，この節のすべての結果には，密接に対応した量子力学的な結果がある．例えば， $\mathbf{L}$ の２つの成分が同時に正準運動量ではあり得ないという事実は，量子力学では， L_i と L_j が同時固有値を持つことはできない，という良く知られた事実に対応する．しかしながら， L^2 と任意の L_i とは同時に量子化することができる．実際，これらの関係の多くは，古典力学の定理としてよりもむしろ量子力学の形の方がはるかに良く知られている．このように，角運動量に対する古典的な Poisson の括弧式についての，最も初期の参考文献の１つは， Born と Jordan の *Elementare Quantenmechanik* の1930年版であるように思われる．さらに，回転の下におけるベクトル関数の一般的な変化を与える（9－123）式は，量子力学においては長い間良く知られていた（Condon and Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, p. 59参照）けれども，ごく最近までは，その古典的な形での唯一の参考文献は， H. B. G. Casimir の有名な学位論文，*Rotation of a Rigid Body in Quantum Mechanics*, 1931, p. 30, だけであった．

**）この節は初めて読むときには省いてよい．

いる．特定の軸のまわりの回転は，唯1つのパラメーターを持つ部分群（実際に2次元の回転群）をつくっている．有限変換の群は，それに関連した無限小正準変換の群と同じ性質を持っており，取り扱いが簡単なので無限小正準変換を調べるのが通例である．その母関数が運動の定数であるような無限小正準変換の Lie 群は，すでに見たように，そのような変換がハミルトニアンを不変に保つので，系の**対称性の群**（ *symmetry group* ）として知られている．1つの系の対称性の群を見出すことは，系の古典的運動を解くのに遠回りをすることになるが，量子力学的な問題の解に対してはより近道をすることになる．

球対称性を持つ系は，任意の軸のまわりの回転に対して不変である．したがって，その対称性の群の1つは，3次元の回転群 $R(3) \equiv SO(3)$ でなければならないことが期待されるであろう．そのような系ではベクトル**L**は保存されるが，このことは**L**の成分を空間回転の母関数と同一視することと一致している．Lie 群の特徴は，その群をつくっている変換の母関数の間の括弧式（ Poisson の括弧式，交換子等）の持つ関係によって決定される．一般に，G_i が個々の1パラメーター変換の母関数であるならば，Lie 群において，括弧関係式は線形であって，

$$[G_i, G_j] = C_{ijk} G_k \text{ ,} \qquad (9-130)$$

の形である*．ここで C_{ijk} という量は，Lie 群（あるいは，括弧“積”（product ）を含むそれに関連した Lie 代数）の**構造定数**（ *structure constants* ）と呼ばれる．L_i によって生成される変換の群に対して，（9−128）式は構造定数が $C_{ijk} = \epsilon_{ijk}$ であることを示しており，この群を3次元の回転群として特徴づけるのはこの関係である．このようなわけで，（4−117）式の無限小回転の行列生成子 $\mathbf{M}_i$ は変換関係，（4−118）式，

$$[\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k, \qquad (4-118)$$

---

*) 例えば，L. P. Eisenhart, *Continuous Groups of Transformations*, pp.25-28 を見よ．

に従っていたのである．すなわち，構造定数は L_i に対するものと同じである．量 L_i と $\mathbf{M}_i$ とは物理的には異なっている．(9−125)式と(4−118)式の括弧は(同じ意味の代数的性質は持っているが)，異なる演算に関係している．しかし，L_i と $\mathbf{M}_i$ の構造定数が同じであることは，両者が同じ群構造, SO(3) を持つことを示している．

p. 421
有界な Kepler 問題に対して，われわれは $\mathbf{L}$ のほかにもう１つの保存量 $\mathbf{A}$ が存在することを見た(第3−9節)．この $\mathbf{A}$ すなわち Laplace ベクトルは，

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r} ,$$

で定義される．$\mathbf{A}$ の成分のそれ自身および $\mathbf{L}$ の成分との Poisson の括弧式は，直接計算すれば得られる．明らかに $\mathbf{A}$ は系のベクトルとしての資格があるから，直ちに括弧式，

$$[A_i, L_j] = \epsilon_{ijk} A_k , \qquad (9-131)$$

が得られる．$\mathbf{A}$ の成分の間の Poissonの括弧式は，そのような簡単なやり方では求めることができないが，かなりの量の面倒な計算の後に，

$$[A_1, A_2] = -\left(p^2 - \frac{2mk}{r}\right) L_3 , \qquad (9-132)$$

であることが見出される*．右辺の括弧の中の量は $2mH$ であることがわかるが，これは保存される値 $2mE$ を持っている．それゆえ，

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{-2mE}} \equiv \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2m|E|}} , \qquad (9-133)$$

によって定義される新しい一定なベクトル $\mathbf{D}$ を導入すれば(E は有界な運動に対しては負であることに注意せよ)，$\mathbf{D}$ の成分は，Poisson の括弧式，

$$[D_1, D_2] = L_3 ,$$

---

*) $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$ を系のベクトル $\mathbf{C}$ とみなし，Poissonの括弧式 $[C_1, (\mathbf{p} \times \mathbf{L})_2]$ と $[C_1, \mathbf{r}/r]$ をまず計算し，Poissonの基本括弧式と(9−125)式をできる限り利用することによって，この導出をいくらか短かくすることができる．

を満足する．添字をサイクリックに置き換えることによって，Poissonの括弧式の完全な組が直ちに導かれる．このように，**L**と**D**の成分は合わせて，有界なKepler問題に対する対称性の群をつくっている．構造定数は，恒等式，

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k, \qquad (9-128)$$

$$[D_i, L_j] = \epsilon_{ijk} D_k, \qquad (9-134)$$

および，

$$[D_i, D_j] = \epsilon_{ijk} L_k, \qquad (9-135)$$

から得られることになる．

回転に対する基本的な行列を調べてみると，有界なKepler問題に対する対称性の群は，4次元の実回転の群と同一のものであることが示される．通常これはSO(4)またはR(4)と呼ばれるが，このような変換は2次形式 $x_\mu x_\mu$ の値を変えない．ここですべての x_μ は実である．4次元の直交変換は，16個の
p. 422
行列要素の間に10個の条件があるので，6個の行列要素だけが独立である．無限小変換を，いろいろな平面内での一連の回転からつくられているものとみなせば，容易に対応する6個の生成子を得ることができる．それらのうちの3個は，3つの異なった x_i-x_j 平面内での回転であって，その生成子は，第4行および第4列に零がつけ加えられることを除いては，(4−117)式の生成子 $\mathbf{M}_i$ に対応する．残りの3個は，x_i-x_4 平面内での無限小回転を生成するものである．このように，x_1-x_4 平面内での無限小回転に対する生成子行列は，

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (9-136)$$

であり，$\mathbf{N}_2$ と $\mathbf{N}_3$ も同じようにして与えられる．直接に行列の掛算を行ってみれば，これら6個の行列は次のような交換子（またはLie括弧式）関係を満足することが示される．

$$[\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k,$$

$$[\mathbf{N}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{N}_k,$$
$$[\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{M}_k.$$

これらは，Poissonの括弧式の関係（9－128），（9－134）および（9－135）式と同じであるから，有界なKepler 問題の対称性の群と R(4) の同一性はこうして証明されたことになる．

正のエネルギーを持つ Kepler 問題（すなわち散乱）に対しては，**A** はやはり運動の定数であるが，* 適当な換算実ベクトルは，**D** の代わりに，次のように定義された **C** である．

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2mE}} \ . \qquad (9-137)$$

そして，**L** と **C** に対する Poisson の括弧式の関係は，

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}L_k,$$
$$[C_i, L_j] = \epsilon_{ijk}C_k, \qquad (9-138)$$
$$[C_i, C_j] = -\epsilon_{ijk}L_k\ ,$$

となる．（7－70）式と比較すれば，これらの構造定数は制限 Lorentz 群の構造定数と同じであることがわかる．それゆえ，これらは非相対論的力学における，正のエネルギーの Kepler 問題に対する対称性の群でなければならない．もちろん，この偶然的な事情の中に，物理的なアイデアの類似を読むこと
p.423
のないように注意しなければならない．Kepler 問題は，その中に特殊相対論の基本的な概念の種子を含んではいない．それは純粋に非相対論的Newton力学の問題である．対称性の群が，通常の空間よりも高次の空間の概念を含むかもしれないということは，ここでわれわれの探している対称性が 6 次元の位相空間内の対称性であるという事実に結びつけられる．対称性の群は，ハミルトニアンを不変に保つ，この空間内での正準変換から構成されている．それゆえ，その群が 3 次元よりも高次の空間における変換の言葉で解釈できるということは，驚くべきことではない．

---

*）第3－9節の議論は，E あるいは力の定数 k の符号には無関係である．

2次元の等方調和振動子は，それに対する対称性の群が容易に求められる，もう1つの力学系である．直交座標において，この系のハミルトニアンは，

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + m^2\omega^2 x^2) + \frac{1}{2m}(p_y^2 + m^2\omega^2 y^2), \qquad (9-139)$$

と書くことができる．ハミルトニアンは時間を陽に含まないから，それは時間的に一定であって，系の全エネルギーに等しい．z 軸は系の対称軸であり，したがってこの軸に沿う角運動量（それは実際全角運動量である），

$$L = xp_y - yp_x\ , \qquad (9-140)$$

もまた運動の定数である．この問題に対しては，さらにいくつかの運動の定数が存在し，それらは，

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}(p_i p_j + m^2\omega^2 x_i x_j)\ , \qquad (9-141)$$

で定義される対称2次元テンソル**A**の成分として書くことができる．3つの異なる要素のうちで，対角項はそれぞれ x 軸および y 軸に沿う，別々の1次元運動に関連したエネルギーとみなされる．物理的にはこの2つの運動の間には結合はないので，2つのエネルギーは別々に定数でなければならない．もう少し形式的にいえば，A_{11} と A_{22} の各々と H との Poisson の括弧式が零であることは，H が（9－139）式のように書かれるということから明らかである．**A**の非対角要素，

$$A_{12} = A_{21} = \frac{1}{2m}(p_x p_y + m^2\omega^2 xy), \qquad (9-142)$$

の意味する所は少しわかりにくい．それが運動の定数であることは，H との Poisson の括弧式を計算してみれば容易に知ることができる．x および y 方向の別々の運動に関連して，A_{11} と A_{22} は振動の振幅と関係づけられ，一方 A_{12} は，2つの振動の位相差によって決定される．このようにして，この運動に対する解は，

$$x = \sqrt{\frac{2A_{11}}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \theta_1),$$

$$y = \sqrt{\frac{2A_{22}}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \theta_2),$$

p. 424
と書くことができ，さらに（9－142）式から，

$$A_{12} = \sqrt{A_{11}A_{22}}\cos(\theta_2 - \theta_1), \tag{9-143}$$

であることが導かれる．

テンソル**A**のトレース（trace）は調和振動子の全エネルギーである．**A**の行列の要素から，他の2つの異なった運動の定数をつくることができる．それらを次の形に書くのが便利である．

$$S_1 = \frac{A_{12} + A_{21}}{2\omega} = \frac{1}{2m\omega}(p_x p_y + m^2\omega^2 xy), \tag{9-144}$$

$$S_2 = \frac{A_{22} - A_{11}}{2\omega} = \frac{1}{4m\omega}(p_y^2 - p_x^2 + m^2\omega^2(y^2 - x^2)). \tag{9-145}$$

これらに対して第3の運動の定数，

$$S_3 = \frac{L}{2} = \tfrac{1}{2}(xp_y - yp_x), \tag{9-146}$$

を付け加えることができる．量 S_i に全エネルギー H を加えたものは，時間を陽に含まない4個の代数的な運動の定数を形づくっている．それらのすべてが独立でありえないことは明らかである．なぜなら　自由度2の系においては，高々3個のそのような定数があり得るだけだからである．われわれは，等方調和振動子に対する軌道は楕円であることを知っており，平面内における軌道のパラメーターを記述するためには，3個の運動の定数 ── 例えば，楕円の半長軸，離心率および向き ── が必要である．第4番目の運動の定数は，ある与えられた時刻に，質点がある特定の点を通過することに関連したものであって，それゆえ時間に陽に依存していなければならない．したがって，S_i と H とを関連づける1つの関係式が存在しなければならない．直接計算することによって，

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{H^2}{4\omega^2}, \tag{9-147}$$

であることは容易に示される[*]

Poissonの括弧式を真正直に計算することによって，量 S_i は，関係式，

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k \,, \qquad (9-148)$$

を満たすことを証明することができる．これらは，3次元の角運動量ベクトル，あるいは3次元空間内での回転の生成子に対するものと同じ関係式である．したがって，S_iによって生成される変換群は，R(3)または SO(3) と同一視することができる．実際には，この同一視にはある程度のあいまいさがp. 425 ある．すでに，R(3)と特殊ユニタリー(*unitary unimodular*)群 SU(2) は準同型であることを知っている(197ページ参照)．ここでは，SU(2)の方がより適当であることがわかる[**] この選び方がよいという事情をちょっと見ておくためには，(9−147)式は，空間の各点が軌道のパラメーターの特定の組に対応しているような3次元空間があることを暗示している，ということに注意するのがよい．与えられた系のエネルギーに対して，(9−147)式は，この空間内の軌道"点"が1つの球面上にあることを述べている．3つの定数 S_i はいずれも，この球面上の3次元の回転を生成する．すなわち，それらは，同じエネルギーをもつ1つの軌道を他の軌道へ変化させる．S_1 は軌道の離心率を変化させる1つの変換を引き起こすが，任意の与えられた最終の離心率に対して，その離心率を与えるような**2つ**の変換を見出すことができるということを示すことができる．2次元の調和振動子に対して，R(3)よりもむしろSU(2)が正しい対称性の群であることを示しているのは，この変換の2価性である．より高次元に対しては，回転群と SU(n) 群の構造定数はもはや同じではなく，2つの群は明確に区別することができる．3次元の等方調和振動子に対しては，再び(9−141) 式で定義される運動の定数であるテンソルが存在する．ただし，このときには添字が1から3まで変わるところがちがっている．今度は，

*) 条件(9−147)式と等価な形は，**A**の行列式が $L^2(\imath)^2\ 4$)に等しいということである．Kepler 問題の場合においてと同様に，運動の新しい定ベクトルAの成分は，すべてが他の運動の定数と独立ではないことが思い出されるであろう．実際，**A**, **L**およびHを結びつける2つの関係，(3−83)式および(3−87)式が存在する．

) もっと十分な議論については，H. V. McIntosh, *Am. Jour. Phys.* **27, 620 (1959) を見よ．

このテンソルの異なる成分は，Lの成分と合わせて，SU(3) に属するかなり複雑な構造定数を持つ，Poisson の括弧式の関係を満足する．実際，n 次元等方調和振動子に対する対称性の群は，SU(n) であることを示すことができる.*

付加的な代数的な運動の定数が存在すること ── したがってより高い対称性の群が存在すること ── と系の運動の縮退度との間に関係があることはすでに指摘されている（135 ページ参照）．Kepler 問題および等方調和振動子の場合には，付加的な運動の定数は軌道のパラメーターと関係づけられる．軌道が閉じていないならば，すなわち運動が単一の曲線に限られていないならば，そのような軌道パラメーターについて語ることはほとんどできない．運動のいろいろの成分の周期が有理比をなすとき，すなわち縮退しているときにのみ軌道は閉軌道となるであろう．古典的な例としては2次元の非等方振動子がある．x および y 方向の運動の振動数が互いに有理比をなすときには，質点は閉じたLissajous の図形を描く．しかし，振動数の比が有理数でないならば，質点の軌道は空間を満たす，すなわちエルゴード的なものになり，2つの方向の運動のエネルギーによって決まる長方形の中の任意の点に，究極的にはいくらでも近づくような軌道を描くことになる　対称性と縮退の間のこの関係の厳密な性質は，今なお研究の1つの主題となっている．同じ数の自由度を持つ，すべての問題に対して適用できる，縮退していない系に対する複雑な（かつ恐らくは複素の）対称性の群を見出す試みは未だ成功してはいない．次の章で，対称性と縮退の間の関係について，さらに深く考える機会があるであろう．

p. 426

9−8　Liouville の定理

Poisson の括弧式を用いた定式化の最後の応用として，Liouville の定理として知られている統計力学の基礎定理について簡単に論じよう．古典力学においては，任意の系の正確な運動は，初期条件によって完全に決定されるが，複雑な系に対しては正確な解を計算することが実行不可能な場合がしばしばあ

---

*）このことは量子力学の場合について，G. A. Baker, Jr., *Phys. Rev.* **103**, 1119(1956) によって証明された．その議論は古典力学の言葉でも言い表わすことができる．

る．例えば，ある体積の気体の中にある 10^{23} 個程度の分子の運動を完全に計算することは，とても望めない．その上，初期条件が完全に知られていない場合がしばしば起こる．例えば，時刻 t_0 において，与えられた質量の気体があるエネルギーを持っている，ということは言えるけれども，各々の分子の位置や速度を決定することはできないという場合である．それゆえ，統計力学においては，多くの粒子を含む系に対して完全な解を求めることは企てないで，そのかわりに，多数の同じ構造を持つ系の運動を調べることによって，系のある平均的な性質を予測することを目的とするのである．求めようとする量の値は，**集団**（ *ensemble* ）を構成する多数の系のすべてにわたって，その量の平均値を計算することによって得られる．[1] 集団を構成している各々の系は，われわれの不完全な知識が許す範囲で実際の系と同じであるが，それらの系に対する初期条件は，この不完全な知識と矛盾しない限り，どんなものであってもよい．[2] ところで，各々の系は，位相空間における1点（これを系の代表点（ representative point ）という）で表わされるから，系の集団は位相空間の点の集りに対応する． Liouville の定理は，位相空間において，ある与えられた系の代表点の近傍における代表点の密度が，時間的に一定であるということを述べるものである．

上で述べた密度を D とすると，この D は2つの原因によって時間的に変化することができる．その1つは，それが系のある与えられた代表点の近傍における密度であるから，その座標 (q_i, p_i) が時間的に変化し，代表点が位相空間の中を動きまわるにつれて，D は座標を通じて時間に**陰に**依存するであろう．他の1つは，D が時間に陽に依存するかも知れないということによる．位相空間内のある固定した点で計算しても，D は時間的に変化するかも知れない．方程式（9－94）によれば，D の時間に関する全導関数，すなわち，この2つの型

1） 統計力学では，平衡にある系の振舞を調べるために，その系と同じ構造を持つ多数の系の集りを仮想的に考えて，その多数の系に対して統計的方法を適用する．この仮想的に考えた系の集りを集団（ ensemble ），または統計集団（ statistical ensemble ）と呼ぶ．

2） 例えば，実際の系において，全エネルギー，体積が与えられている場合には，初期条件としては，各分子のエネルギーの和が全エネルギーに等しく，また各粒子がこの体積の中にあるとする限り，勝手にとってよい．不完全な知識というのは，各分子の位置や速度が完全に知られていないことを意味する．

の時間的変化による D の変化の割合は，次のように書くことができる．

$$\frac{dD}{dt}=[D,H]+\frac{\partial D}{\partial t}\ . \qquad (9-149)$$

この式において，Poissonの括弧式は D が時間に陰に依存することから生ずる項であり，最後の項は陽に依存することによるものである．

位相空間内を動きまわる系の代表点の集団は，多次元空間における流体によく似た振舞いをする．それゆえ，統計集団の議論と，流体力学の良く知られた概念の間には多くの類似性がある．（9－149）式において，全導関数は，われわれが集団“流体”の特定の一部の運動を時間的に追跡して行くときの，密度の導関数である．ときには，これは**実質的**（*material*）あるいは**流体力学的**（*hydrodynamic*）導関数といわれる．他方，偏導関数の方は，固定点 (q, p) において計算される．それは，あたかも位相空間内の特定の点に身をおいて，系の代表点の集団がわれわれの傍を流れて行くときの密度の時間的変化を測定するようなものである．これら２つの導関数は，流体の流れを考える際にしばしば用いられる２つの観点に対応している．位相空間内の固定点における
p. 427
偏導関数は，座標を単に空間内の１点を指定するものと見なす Euler の観点と一致している．全導関数は，個々の粒子を時間的に追跡する Lagrange の描像と一致している．この場合，座標は，実質的には空間内の１点を指定するのではなくて，質点を指定するものである．基本的には，位相空間についてのわれわれのこれまでの考察は，Lagrangeの観点により一層似ているものである．すなわち，量 (q,p) の集りは，１つの系とその時間的に変わる配置を規定していると考えてきたのである．

与えられた代表点を囲む位相空間内の無限小体積を考えよう．この体積の境界は，$t=0$ においてその近傍にある系の代表点から成る面で形づくられるものとする．時間が経過するにつれて，この体積に含まれている系の代表点は位相空間の中を動きまわり，その体積は時間と共に異なった形をとる．図９－３の点線で示した曲線は，時間が経過したときの無限小体積の形の変化を図式的に示したものである．はじめに体積の内部にあった代表点は，時間がたってもその外へ出ることはできないから，明らかにその体積の中に含まれた代表点の

数は変わらない．もしある代表点が境界面を横切ることがあるとすれば，ある時刻に，その代表点は，境界面を作っている代表点の１つと位相空間内で同じ位置を占めることになるであろう．

代表点のその後の運動は，その時刻における位相空間内の位置によって一義的に決定されるから，この２つの代表点は，同じ位置をとった後には，同じ道筋を動いて行くであろう．それゆえ，代表点は決して境界面を横切って，体積の外へ出ることはできないのである．同じ理由で，はじめ体積の外にあった代表点は，決してその体積の中へはいることはできない．

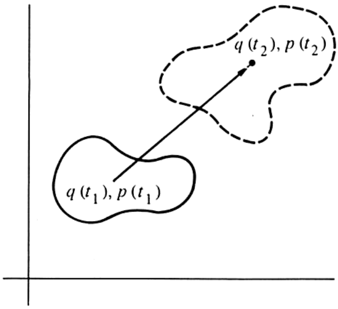


図９－３
位相空間内のある体積の運動．

すでに示されたように，正準変換の能動的な描像によれば，系の代表点の時間的な運動は，単にハミルトニアンによって生成される正準変換の進展にすぎない．図９－３に示されるように，時刻 t_2 における正準変数 (q, p) は，時刻 t_1 における変数と，特定の正準変換によって関係づけられる．系の代表点のまわりの無限小の体積要素の，その時間間隔における変化は，同じ正準変換によって与えられる．さて，Poincaré の積分不変量，(９－86)式は，位相空間内の体積要素が，正準変換によって変わらないということを述べている．それゆえ，位相空間の中の，系の代表点のまわりの体積要素は，時間的に変わることはできない．

p. 428
このように，無限小領域に含まれる代表点の数 dN も，またその領域の体積 dV も一定であるから，その密度，

$$D = \frac{dN}{dV},$$

も時間的に不変でなければならない．すなわち，

$$\frac{dD}{dt} = 0,$$

である．これで Liouville の定理が証明された．この定理はまた，（9－149）式を用いれば，次のような形に表わすこともできる．

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -[D, H]. \tag{9-150}$$

系の集団が統計的平衡（ statistical equilibrium ）[1] にあるときには，ある与えられた状態にある系の数は変わらない．言い換えれば，位相空間のある与えられた点における代表点の密度は時間的に変化しない．定まった点における D の時間的な変化は，D の時間に関する偏導関数によって表わされるから，統計的平衡においては $\frac{\partial D}{\partial t}$ が零にならなければならない．（9－150）式によれば，統計的平衡の条件は，

$$[D, H] = 0\,,$$

で表わされることがわかる．したがって，密度 D を，時間を陽に含まない運動の定数の関数であるように選ぶならば，そのような密度 D で表わされる系は確かに統計的平衡にある．なぜなら，その場合には，D と H との Poisson の括弧式は零となるからである．このように，保存系に対しては，　をエネルギーの任意の関数にとることができ，そうすれば平衡の条件は自動的に満足される．系の集団の特性は，D としてどのような関数を選ぶかによって決定される．その 1 つの例は，D をある与えられたエネルギーを持つ系に対しては定数，他のエネルギーを持つ系に対しては零にとった場合であって，これは良く知られた**ミクロカノニカル**集団[2]（ *microcanonical ensemble* ）にほかならない．

このような考察をここで述べたのは，Poisson の括弧式を用いた定式化が，統計力学においていかに有用であるかを示すためである．これ以上，このような議論に深入りすることは，この書物の範囲からはみ出すことになるであろう．

1）系の集団を表わす代表点の，位相空間における分布が時間的に変わらないとき，その集団は統計的平衡にあるという．

2）定エネルギー集団ともいう．また，$D = e^{-H/kT}$ ととった集団はカノニカル集団（ canonical ensemble ），標準集団または正準集団と呼ばれる（統計力学の書物を参照せよ）．

参 考 書

C. CARATHÉODORY, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. 正準変換あるいは接触変換は，最初，数学者によって偏微分方程式の理論において導入された．物理学者が使うこの変換の性質の多くは，このような目的のためにはじめて展開されたものである．物理的な応用の源になっている数学についてのもっとも徹底的な解説は，Carathéodory の権威のある著述の中にある．幸いなことに，今では英訳を手に入れることができる．偏微分方程式についての当面の問題に関係のある文献は，第1巻の第4－7章にある．他の多くのトピックスに加えて，上で（589ページ）“Ca-p 429, ratheodory の定理”と呼ばれたものの，もっと完全な証明を含んでいる．“それがどのように正確になされるか”を見るために，何度も Carathéodory に戻ってくることになる．

H. RUND, *Hamilton–Jacobi Theory in the Calculus of Variations*. この文献は，物理的な応用をはっきりと念頭において，いくらか異なった数学的描像を与えている（第2章，第12－14節）． 多くの議論において，時間は正準変数の1つと考えられている．

M. BORN, *The Mechanics of the Atom*. 古典力学における正準変換の問題は，Bohr の前期量子論および新しい量子力学の最初の定式化において，重要な役割を演じた．それゆえ，表向きにはこれらのいずれかの形の量子力学を主題としている書物の中でも，しばしば古典力学の中の必要な分野についての詳しい説明が与えられている．これらの書物の中で最も目立っているのは，1924年に出版された，この Born の書物であるが，これは波動力学の現われる前に書かれたものである．最初の章では正準変換が簡潔に論じられており，また多くの興味ある物理的な例が与えられている．Poisson の括弧式については言及されていないが，これは，Poisson の括弧式に関心が寄せられるようになったのは，Heisenberg および Dirac による量子力学の定式化が現われてから後のことだからである．

R. C. TOLMAN, *The Principles of Statistical Mechanics*. 理論物理学の百科全書といってもよいこの部厚い書物の第Ⅱ章には，正準変換やそれに関連した古典力学のいろいろな問題について，簡単ではあるがしかし明確な議論が与えられている．Poisson の括弧式の性質も取り扱われている．第Ⅲ章の第19節では，Liouville の定理が取り上げられている．

C. LANCZOS, *The Variational Principles of Mechanics*. 正準変換は，それが何であるかが認識されるよりもずっと以前に，古典力学の摂動論を通じて最初に力学にはいってきた（これらの応用についての文献は，以下で摂動論を扱う第11章で与えられるで

あろう）．今では，中級程度以上の力学の教科書ではどれでも，Poisson の括弧式と正準変換は，かなり注意を払って取り扱われている．ごく少数の文献だけしかはっきりと引用することができない．Lanczos は，他の著者とは異なった観点に立っている．彼はかなり多くのことを語っているが，比較的少ない方程式しか書いていない．その主題は，数学的な起源に強く結びついているが，その使い方は物理的である．

L. PARS, *A Treatise on Analytical Dynamics.*　この教科書では，正準変換は，第 24 章でそれが表立って（接触変換として）名づけられ，論じられる以前に何回も使われている．シンプレクティックな方法と生成演算子による方法の両方が含まれている．特に注目に値するのは，陽に母関数に導く，実質的には Carathéodory の定理の証明である．

J. L. SYNGE, *Classical Dynamics.*　Synge は大抵の所で，t とそれに共役な運動量 H を含む位相空間を用いて論じているが，それ以外ではその方法はこの書物で採用したやり方にかなり類似している．記法は全く異なっているけれども，シンプレクティックな方法が行列の形で与えられている．シンプレクティックな方法から母関数の方法へ移る１つのやり方が与えられているが，その筋道は明確ではなく，また納得のいくものではない．

C. W. KILMISTER, *Hamiltonian Dynamics.*　テンソル解析や微分幾何学についての現代的な数学の基礎知識を身につけている人達にとっては，この小さな書物によって，シンプレクティックな方法に対して特に力点をおかれた，優美でかつ簡潔な議論が与えられる．この著者は，η と ζ に関する“普遍生成演算子”（*universal generator*）を提示しており，これから４つの型が導出される．

E. J. SALETAN AND A. H. CROMER, *Theoretical Mechanics.*　大抵はシンプレクティック
p. 430
な観点から正準変換に対してかなりのスペースが与えられているが，母関数の方法への移行も含まれている．正準という言葉は，この書物で拡張された正準変換と呼ばれているものの意味で使われている．さらに，全く危険であるとは言えないとしても，甚だ正統的ではない**カノノイド変換**（*canonoid* transformation）という概念 —ある型のハミルトニアンに対してのみ正準である変換 — が付け加えられている（正準変換の大部分の応用は，**すべての**ハミルトニアンに対して正準であるような性質に関係している）．連続なパラメーターに依存する正準変換が陽に論じられている．

E. C. G. SUDARSHAN AND N. MUKUNDA, *Classical Dynamics.*　これは，群論的な方法の浸透した力学の書物である．理論素粒子物理学者の観点に立った古典力学と名付けてもよいかも知れない．この書物の大部分は，実際，正準変換と，系の対称性およ

び変換の意味を取り扱っている.

H. V. McIntosh, *Symmetry and Degeneracy*, in *Group Theory and its Applications*, vol. II, E. M. Loebl, ed. 系の対称性と運動の定数の間の関係について，再びこの熱心な研究を引き合いに出そう．正準変換それ自身はほとんど述べられていないが，対称操作の生成子が運動の定数を与えるという考え方は非常にしばしば現われ，また多くの例が与えられている.

演 習 問 題

1. 2組の Hamilton の方程式を1つに結びつけようとする企ての1つは，q と p とで1つの複素量をつくってみることである．ハミルトニアンを変えない場合には，1自由度の系に対して，変換

$$Q = q + ip, \qquad P = Q^* \ ,$$

は正準的ではないことを，Hamilton の方程式から直接示せ．スケール変換のみによって Q, P と関係づけられ，かつ正準的であるような座標の組 Q', P' を見出すことができるか？

2. a) ハミルトニアン，

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2},$$

を持つ1次元系に対して，1つの運動の定数，

$$D = \frac{pq}{2} - Ht,$$

が存在することを示せ.

b) a) の1つの一般化として，ハミルトニアン，

$$H = |\mathbf{p}|^n - ar^{-n},$$

を持つ1平面内での運動に対して，1つの運動の定数，

$$D = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{n} - Ht \ ,$$

が存在することを示せ．ここで $\mathbf{p}$ は，直交座標に共役な運動量ベクトルである.

c) 変換 $Q = \lambda q, p = \lambda P$ は明らかに正準的である．しかし，時間の延びを伴なう同
p. 431
じ変換，$Q = \lambda q, p = \lambda P, t' = \lambda^2 t$ は正準的でない．しかしながら，a) のハミルトニアンに対して，この変換の下で，q と p に対する運動方程式は不変であることを示せ．運

動の定数Dは，この不変性に結びついていると言われる．

3. 第8－4節において，時間を正準変数の1つとして取り扱う際の問題点がいくつか論じられている．もしわれわれがこれらの困難を避けて通ることができるならば，tを正準変数と考える変換式は，実際に変換が時間のスケールに影響を与えないとすれば，(9—14)式に帰着されることを示せ．

4. 変換

$$Q = \log\left(\frac{1}{q}\sin p\right), \qquad P = q\cot p,$$

が正準変換であることを直接に示せ．

5. 1自由度の系に対して，変換，

$$Q = \arctan\frac{\alpha q}{p}, \qquad P = \frac{\alpha q^2}{2}\left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2}\right),$$

が正準変換であることを直接に示せ．ここでαは適当な次元の任意定数である．

6. 2組の座標$(q,\ p)$と$(Q,\ P)$の間の変換が，

$$Q = \log(1 + q^{\frac{1}{2}}\cos p),$$
$$P = 2(1 + q^{\frac{1}{2}}\cos p)q^{\frac{1}{2}}\sin p,$$

で与えられている．

a) これらの変換式から直接に，q，pが正準変数であれば，Q, Pも正準変数であることを示せ．

b) この変換の母関数は，

$$F_3 = -(e^Q - 1)^2\tan p,$$

であることを示せ．

7. a) ある与えられた正準変換に対して，母関数の4つの型の各々が存在するならば，Legendre 変換を用いて，それらの間の関係を導け．

b) 恒等変換に対するF_4型の母関数と，交換変換に対するF_3型の母関数を求めよ．

c) 自由度nの系におけるqの直交点変換に対して，新しい運動量も同様に，成分が元の運動量と配置空間におけるある勾配との和であるような，n次元ベクトルの直交変換によって与えられることを示せ．

8. 変換，

$$Q_1 = q_1, \qquad P_1 = p_1 - 2p_2,$$
$$Q_2 = p_2, \qquad P_2 = -2q_1 - q_2,$$

は正準変換であることを示し，その母関数を求めよ．

9.　自由度2の系の点変換，

$$Q_1 = q_1^2, \qquad Q_2 = q_1 + q_2,$$

に対して，全体としての変換が正準変換であることと矛盾しない，P_1 と P_2 に対する最も一般的な変換を求めよ．P_1 と P_2 に対して特別な選び方をすれば，ハミルトニアン，

$$H = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2,$$

p. 432

は，Q_1 と Q_2 がサイクリック座標となるハミルトニアンに変換されることを示せ．この方法によって問題を解き，q_1, q_2, p_1, p_2 を，時間と，それらの変数の初期値との関数として表わす式を求めよ．

10.　自由度1の系に対して，変換，

$$Q = q\cos\alpha - p\sin\alpha,$$
$$P = q\sin\alpha + p\cos\alpha,$$

は，パラメーター α の任意の値に対して，シンプレクティック条件を満たすことを示せ．この変換に対する母関数を求めよ．$\alpha = 0$ のときのこの変換の物理的意味は何か？ $\alpha = \pi/2$ のときはどうか？ 求められた母関数はこれら両方の場合に対して有効であるか？

11.　変換，

$$Q_1 = q_1 q_2, \qquad P_1 = \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} + 1,$$

$$Q_2 = q_1 + q_2, \qquad P_2 = \frac{q_2 p_2 - q_1 p_1}{q_2 - q_1} - (q_2 + q_1),$$

は正準変換であるかどうかを決定せよ．

12.　正準変換のための条件に対する直接的な条件は，

$$\mathbf{JM} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{J},$$

の形に表わされたシンプレクティックの条件によって直ちに与えられることを示せ．

13.　制限された正準変換の集まりは，第7章の演習問題9に述べられている条件によって定義される，群の性質を持っている．このことを，まず正準変換によってHamiltonの原理が不変であること（（9—11）式参照）を用いて証明し，次にシンプレクティック条件を用いて証明せよ．

14.　任意の方法を選んで，変換，

$$x = \frac{1}{\alpha}(-\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2), \qquad p_x = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 - Q_2),$$

$$y = \frac{1}{\alpha}(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 + Q_2), \qquad p_y = \frac{\alpha}{2}(-\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2),$$

が正準変換であることを示せ．ここに α は，ある固定されたパラメーターである．一定の磁場 **B** に垂直な平面内を運動する電荷 q を持つ質点の問題にこの方法を適用し，パラメーター α を，

$$\alpha^2 = \frac{qB}{c},$$

ととることによって，ハミルトニアンを (Q_i, P_i) 座標で表わせ．このハミルトニアンから，質点の運動を時間の関数として求めよ．

15. どのような条件の下で，変換，

$$Q = \frac{\alpha p}{x}, \qquad P = \beta x^2,$$

p 433
は自由度1の系に対する正準変換を表わすか？ ここで，α, β は定数である．またこの変換に対して適当な母関数を求めよ．この変換を，1次元の調和振動子の解に適用して見よ．

16. 変換，

$$Q_1 = q_1^2, \qquad Q_2 = q_2 \sec p_2,$$

$$P_1 = \frac{p_1 \cos p_2 - 2q_2}{2q_1 \cos p_2}, \qquad P_2 = \sin p_2 - 2q_1,$$

は正準変換であることを，任意に選んだ方法で証明せよ．この変換に導く母関数を求めよ．

17. a) 変換，

$$Q = p + iaq, \qquad P = \frac{p - iaq}{2ia},$$

は正準変換であることを示し，その母関数を求めよ．

b) この変換を用いて，1次元調和振動子の問題を解け．

18. a) ある系に対するハミルトニアンが，

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right),$$

の形をしている．q に対する運動方程式を求めよ．

b) この H が，調和振動子のハミルトニアンの形に帰着される正準変換を求めよ．変換された変数についての解は，a) で求めた運動方程式が満たされるようなものである

ことを示せ.

19. n 個の質点から成る系が，質点間の距離のみに依存するポテンシャル項から導かれる，相互作用の力を受けて1平面内で運動している.

a) 各質点に対して，(共通の原点に相対的な)平面極座標を用いて，系のハミルトニアンの形を決定せよ.

b) その平面内で，(すべての質点に対して共通な)一様な角速度 ω で反時計回りに回転している座標系への変換に対応する正準変換の母関数を求めよ．運動量に対する変換式はどうなるか？

c) 新しいハミルトニアンはどうなるか？ 元のハミルトニアンと新しいハミルトニアンの差に，どのような物理的意味を与えることができるか？

20. a) 定常運動のまわりの微小振動の問題において，定常運動の点では，すべてのハミルトニアンの変数 $\boldsymbol{\eta}$ は一定であることを示せ. 定常運動に対するハミルトニアンの変数の値が $\boldsymbol{\eta}_0$ で，したがって $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\xi}$ であれば，零にならない最低次の近似では，微小振動に対する有効ハミルトニアンは,

$$H(\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\xi}) = \tfrac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{S}\boldsymbol{\xi},$$

と書くことができることを示せ．ここで $\mathbf{S}$ はその成分が $\boldsymbol{\eta}_0$ のみの関数である成分をもつ正方行列である.

b) 微小振動のすべての振動数は異なっていると仮定し，$\mathbf{M}$ を(正および負の振動数
p. 434
の両方に対する)固有ベクトルの可能な組の成分によってつくられる， $2n \times 2n$ 正方行列であるとする．固有ベクトルは，方向のみが決められていて，大きさは決められていない．固有ベクトルに対して，(実質的にはその大きさを決めることになる) $\mathbf{M}$ を正準変換の Jacobiの行列になるようにする，という条件を課することができることを示せ.

c) 上のようにして求められた正準変換は，有効ハミルトニアンを,

$$H = i\omega_j q_j p_j,$$

の形に変換することを示せ．ここで ω_j は規準振動数の大きさである．正準座標のこの組を用いると，運動方程式はどうなるか？

d) 最後に,

$$F_2 = q_j P_j + \frac{i}{2}\frac{P_j^2}{\omega_j} - \frac{i}{4}\omega_j q_j^2,$$

は，H を，規準振動で振動している独立な1次元調和振動子の集まりに対するハミルトニアンに分解する正準変換に導くことを示せ.

21. a) Poisson の基本括弧式を用いて，変換，

$$Q = q^{\alpha} \cos \beta p, \qquad P = q^{\alpha} \sin \beta p,$$

が正準変換を表わすような α と β の値を求めよ．

b) α と β のどのような値に対して，上の変換は拡張された正準変換を表わすか？この変換に対する F_3 型の母関数を求めよ．

c) b) の結果に基づいて，上の変換がすべての β の値に対して正準変換になるように，変換式を修正することができるか？

22. 対称な剛体に対して，Poisson の括弧式，

$$[\dot{\phi}, f(\theta, \phi, \psi)], \qquad [\dot{\psi}, f(\theta, \phi, \psi)],$$

を計算する公式を求めよ．ここに，θ, ϕ および ψ は Euler の角であり，f は Euler の角の任意の関数である．

23. 荷電粒子が，

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}),$$

であるような一定な磁場 **B** のある空間中を運動している．

a) v_j を粒子の速度の直交座標系での成分とするとき，Poisson の括弧式，

$$[v_i, v_j], \qquad i \neq j = 1, 2, 3,$$

を計算せよ．

b) p_i を x_i に共役な正準運動量とするとき，Poisson の括弧式，

$$[x_i, v_j], \qquad [p_i, v_j],$$
$$[x_i, \dot{p}_j], \qquad [p_i, \dot{p}_j],$$

を計算せよ．

24. Kepler の楕円軌道の半長軸 a と離心率 e は，運動の第1積分の関数であり，したがって正準変数の関数である．同様に，平均近点離角，

$$\phi \equiv \omega(t - T) = \psi - e \sin \psi,$$

は，r, θ およびこれらに共役な運動量の関数である．ここで T は，最近点通過の時刻であり，運動の定数である．a, e, ϕ, ω および T から作られる Poisson の括弧式を計算せよ．実際には，これらの量から作られる零でない異った Poisson の括弧式は9個だけである．

p. 435
25. もし Poisson の括弧式の記号が，2つの正方行列の交換子，

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA},$$

を表わすものとすれば，Jacobi の恒等式が満たされることを示せ．また Poissonの括弧式の同じ表現に対して，

$$[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}],$$

が成立することを示せ．

26. Lagrange および Poisson の括弧式に対して，シンプレクティック行列の記法を用いて，(9―83)式を証明せよ．

27. Lagrange の括弧式に対して，Jacobi の恒等式に類似な式，

$$\frac{\partial\{u, v\}}{\partial w} + \frac{\partial\{v, w\}}{\partial u} + \frac{\partial\{w, u\}}{\partial v} = 0,$$

を証明せよ．ここで，u, v および w は (q, p) の組を指定することのできる3つの関数である．

28. a) 2つの運動の定数の Poisson の括弧式は，たとえそれら運動の定数が時間に陽に依存するときでさえも，それ自身運動の定数であることを証明せよ．

b) ハミルトニアンおよびある量 F が運動の定数であれば，F の t に関する n 階の偏導関数もまた運動の定数であることを示せ．

c) この結果の1つの例として，質量 m の粒子が，力を受けずに自由に一様な運動をしている場合を考えよう．このときには，ハミルトニアンは確かに保存され，また，

$$F = x - \frac{pt}{m},$$

という運動の定数が存在する．直接計算することによって，運動の定数である F の t に関する偏導関数は $[H, F]$ と一致することを示せ．

29. Poisson の括弧式を用いて，1次元の調和振動子に対して，

$$u(q, p, t) = \ln(p + im\omega q) - i\omega t, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

で定義される運動の定数があることを示せ．この運動の定数の物理的意味は何か？

30. 自由度2の系が，ハミルトニアン，

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2,$$

によって記述される．

$$F_1 = \frac{p_1 - a q_1}{q_2}, \quad \text{および} \quad F_2 = q_1 q_2,$$

は運動の定数であることを示せ．他に，代数的に独立な運動の定数はあるか？ Jacobi の恒等式から何か運動の定数が作れるか？

31. ハミルトニアン形式で，第3章の演習問題23で述べられた磁気単極子の問題を設定せよ(望むなら球面極座標を用いてよい)．Poissonの括弧式による定式化によって，その演習問題で定義された量$\boldsymbol{D}$が保存されることを示せ．

p. 436

32. (9—116)式から導かれるような，Poisson の括弧式を用いた運動方程式の形式的な解を用いて，1次元調和振動子の時間的運動を求めよ．時刻 $t=0$ における初期値は x_0 および p_0 であると仮定せよ．

33. ポテンシャル，

$$V=\frac{mk}{x^2},$$

を受けて，1個の粒子が1次元的に運動している．量 $y=x^2$ に対する運動方程式の Poisson の括弧式を用いた形の記号的な解を用いて，xを時間の関数として求めよ．初期条件は，$t=0$ において，$x=x_0$ および $v=0$ であるとする．

34. a) (9—123)式は，ダイアッド形式で，

$$[\mathbf{F},\mathbf{L}]=-\mathbf{1}\times\mathbf{F}=-\mathbf{F}\times\mathbf{1},$$

と書くことができることを証明せよ．

b) $\mathbf{n}$を，中心力による運動の軌道面に垂直な単位ベクトルとすれば，$\mathbf{F}$が位置と運動量のみのベクトルであるときには，

$$[\mathbf{F},\mathbf{n}]=-\frac{\mathbf{F}\times(\mathbf{1}-\mathbf{n}\mathbf{n})}{L},$$

が導かれることを示せ．ここで，Lは軌道角運動量の大きさである．

35. a) 1個の粒子に対して，直接に，すなわち Poissonの括弧式を直接計算することによって，uが r^2, p^2 および $\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$ のスカラー関数であるならば，

$$[u,\mathbf{L}]=0,$$

が成り立つことを示せ．

b) 同様に，$\mathbf{F}$ がベクトル関数，

$$\mathbf{F}=u\mathbf{r}+v\mathbf{p}+w(\mathbf{r}\times\mathbf{p}),$$

であるならば，そのとき，

$$[F_i,L_j]=\epsilon_{ijk}F_k,$$

であることを示せ．ここで u, v およびwは a)におけるのと同じ型のスカラー関数である．

36. a) ベクトル関数と，角運動量の成分の Poisson 括弧式に関する定理を用いて，

FとGが座標と運動量のみの2つのベクトル関数であるならば，

$$[\mathbf{F}\cdot\mathbf{L}, \mathbf{G}\cdot\mathbf{L}] = \mathbf{L}\cdot(\mathbf{G}\times\mathbf{F}) + L_i L_j [F_i, G_j],$$

であることを示せ.

b）Lを，1点を固定された剛体の全角運動量とし，L_μを剛体に固定された1組の直交軸に沿うその成分であるとする．a）の結果を用いて，

$$[L_\mu, L_\nu], \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3,$$

に対する一般式を求めよ（ヒント．F，Gとしてμ軸およびν軸に沿う単位ベクトルを選べ）.

c）L_μに対する，Poissonの括弧式の形の運動方程式から，剛体に対する Euler 運動方程式を導け.

37. q_iとして球面極座標をとって，ハミルトニアン形式における球面振子の問題を設定せよ．これらの正準変数を用いて，Poisson の括弧式，

$$[L_x, L_y], \qquad [L_y, L_z], \qquad [L_z, L_x],$$

p.437
を直接計算し，それらが（9—128）式で予言される値を持つことを示せ．p_θとp_ψは角運動量の互いに垂直な成分であるにもかかわらず，正準運動量として用いることができるのはなぜか？

38. 610ページで，角運動量の任意の2つの成分が保存されるならば，全角運動量が保存されることが示されている．2つの成分が恒等的に零であるならば，第3番目の成分が保存されなければならない．このことから，運動が1平面内に限られ，それゆえその平面内の角運動量の成分が零であるような場合には，全角運動量が定数であることが導かれるように見える．この予言に対しては，多くの明白な矛盾があるように思われる．例えば，腕時計の中の振動しているバネの角運動量や，鉛直面内で斜面をころがり落ちる円板の角運動量などがそれである．これらの反論の効果について論じ，定理の記述にはなんらかの限定条件が必要であるかどうかを論じよ.

39. a）保存量に対する Poisson の括弧式の条件から，Laplace-Runge-Lenz のベクトルA，

$$\mathbf{A} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r},$$

は，Kepler 問題に対する運動の定数であることを示せ.

b）（9—131）式で与えられる，Aの成分に対する Poisson の括弧式の関係を証明せよ.

40. a) (9−141)式で定義される，2次元行列**A**の成分は，2次元等方調和振動子の問題に対する運動の定数であることを証明せよ.

b) (9−144)，(9−145)および(9−146)式で定義された量 S_i, $i = 1, 2, 3$ は，(9−147)式および(9−148)式で述べた性質をもつことを証明せよ.

第10章　Hamilton-Jacobiの理論

p. 438
すでに述べたように，正準変換は力学的な問題を解くための，一般的な手順を与えるために用いることができる．その場合，２つの方法が示唆される．第１にハミルトニアンが保存されるときには，すべての座標がサイクリックになるような新しい正準座標へ変換することによって解を得ることができる．なぜなら，そうすれば，新しい運動方程式を積分することは自明のことになるからである．もう１つの方法は，時刻 t における座標と運動量の値 (q,p) を，例えば $t=0$ における $2n$ 個の初期値(q_0,p_0)のような，定数の組へ変換する正準変換を探すことである．そのような変換が求まれば，もとの正準変数と新しい正準変数との間の変換式,

$$q = q(q_0, p_0, t),$$
$$p = p(q_0, p_0, t),$$

は，まさにわれわれの求めている力学の問題の解である．なぜなら，この式は，座標と運動量をそれらの初期値と時間の関数として与えているからである．この第２の方法は，少なくとも原理的には，ハミルトニアンが時間を含んでいるときでも適用することができるので，第１の方法よりも一般的である．そこで，この章では，そのような変換を見出すにはどうすればよいかを考えることから，議論を始めよう．

10―1　Hamiltonの主関数に対するHamilton-Jacobiの方程式

変換されたハミルトニアンKが恒等的に零になることを要求すれば，新しい変数が時間的に一定になることは自動的に保証される．なぜなら，そのとき運

動方程式は，

$$\frac{\partial K}{\partial P_i} = \dot{Q}_i = 0,$$
$$-\frac{\partial K}{\partial Q_i} = \dot{P}_i = 0, \qquad (10-1)$$

p. 439
となるからである．すでに見たように K は，もとのハミルトニアンおよび変換の母関数と次の関係で結ばれていなければならない．

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

したがって，もし F が，

$$H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \qquad (10-2)$$

を満足するならば，K は零になるであろう．F は，もとの座標 q_i，一定の値をもつ新しい運動量 P_i と時間との関数にとるのが便利である．前章の記号を用いれば，この母関数は $F_2(q,P,t)$ と書くことができる．(10－2) 式の中のハミルトニアンを，同じ変数の関数として書き表わすためには，変換方程式 ((9－17a) 参照) すなわち，

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i},$$

を用いればよい．そうすると，(10－2) 式は次のようになる．

$$H\left(q_1,\ldots,q_n;\frac{\partial F_2}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial F_2}{\partial q_n};t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0. \qquad (10-3)$$

この (10－3) 式は，求める母関数に対する $(n+1)$ 個の変数 $q_1,\ldots,q_n;t$ についての偏微分方程式であって，**Hamilton-Jacobiの方程式**として知られている．通常，方程式 (10－3) の解を S で表わし，**Hamilton の主関数**（*Hamilton's principal function*）と呼ぶ．

もちろん，方程式 (10－3) を積分すれば，もとの座標と時間に対する S の関数関係が得られるだけであって，S の中に新しい運動量がどのように含まれているかは知ることができないように見える．実際，新しい運動量については，

それが定数でなければならない，ということ以外はまだ何も規定されていない．しかし，解の性質から，新しい P_i をどう選ぶべきかが示されるのである．

（10－3）式は，数学的には（$n+1$）個の変数についての1階の偏微分方程式である．（10－3）式に対して，

$$F_2 \equiv S = S(q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}; t), \qquad (10-4)$$

の形の1つの解が存在するものとしよう．ここに，$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ は $n+1$ 個の**独立な**積分定数である．そのような解は，1階偏微分方程式の**完全解**（*complete solutions*）として知られている[*]．しかしながら，積分定数のうちの1つは，事

p. 440

実上解には無関係である．それは，S 自身は方程式（10－3）の中に現われないからである．すなわち，（10－3）式の中には S の q あるいは t に関する偏導関数だけが含まれている．したがって，S がある1つの解であるならば，α を任意の定数として $S+\alpha$ もまた解でなければならない．それゆえ，（10－4）式の $n+1$ 個の積分定数のうち1個は，S に対する付加定数でなければならない．しかし，同じ理由によって，付加定数は母関数において重要ではない．なぜなら，変換式には母関数の偏導関数だけしか現われないからである．それゆえ，われわれの目的のためには，方程式（10－3）の1つの完全解は，

$$S = S(q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; t), \qquad (10-5)$$

の形に書くことができる．ここで n 個の独立な定数は，いずれも単なる付加定数ではない．この数学的な外観からすると，S は F_2 型の母関数に対して要求される形にまさに符号している．なぜなら，（10－5）式は S を n 個の座標，時間 t および n 個の独立な量 α_i の関数として表わしているからである．それゆえ，われわれは n 個の積分定数を，新しい（一定な）運動量であると考えてかまわない．すなわち，

---

*) （10－4）式は，方程式（10－3）に対して可能な解の唯一の型ではない．この解の最も一般的な形は，常微分方程式の一般解のように任意定数を含むものではなくて，むしろ1個あるいはそれ以上の任意関数を含むものである．例えば，R. Courant and D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, 1962, pp. 24－28, およびV. I. Smirnov: *A Course of Higher Mathematics*, Vol. IV, 1964, Section I 11, を見よ．また，必ずしも（10－4）式の型の解が唯一つ存在するとも限らない．与えられた方程式に対して，数個の完全解がある場合もあり得る．しかし，以下の議論で重要なことは，1つの完全解が存在するということだけである．

$$P_i = \alpha_i, \quad (10-6)$$

このように選んでも，新しい運動量が，時刻 t_0における q，p の初期値と結ばれているという，最初の主張と矛盾することはない．そうすると，n 個の変換式（9－17a）は，

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i}, \quad (10-7)$$

と書くことができる．ここで，q, α は独立変数の完全な組を表わすものとする．時刻 t_0 において，これらの式は，n 個の α と，q および p の初期値とを結びつける n 個の方程式を形づくり，指定された初期条件から積分定数の値を計算することを可能にする．変換式の残り半分は，一定の値をもつ新しい座標を与えるもので，

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}, \quad (10-8)$$

となる．定数 β は，同じように初期条件から求めることができる．そのためには，単に（10－8）式の右辺を，$t = t_0$ における q_i の既知の初期値を用いて計算すればよい．そうすると，（10－8）式は“裏返す”ことができて，q_j が α，β および t の関数として与えられる：

$$q_j = q_j(\alpha, \beta, t), \quad (10-9)$$

これで，q が時間および初期条件の関数として与えられたから，問題は解けた
p. 441
わけである.* （10－7）式の微分を実行した後，q に対して（10－9）式を代入すると，運動量 p_i は α, β および t の関数として与えられる：

---

*）数学的には，（10－7）式および（10－8）式の“裏返し”ができるかどうか，つまりそれらが，それぞれ α_i，q_i について解けるかどうかという疑問があるかも知れない．この問題は，（10－7）式および（10－8）式の連立方程式において，おのおのの方程式が独立かどうかにかかっている．あり得ることであるが，もしすべてが独立でないと，それから n 個の α_i あるいは q_i を定めるには，方程式の数が足りないことになる．記号を簡単化するために，S_α で S の α_i に関する偏導関数の集合の元を表わすことにしよう．そうすると（10－8）式は $\beta = S_\alpha$ と表わされる．（10－8）式の中の導関数 S_α が，q の独立な関数の組を形成するということは，Hamilton-Jacobi の方程式の完全解の性質から直接導かれる．事実このことは，n 個の積分定数が独立であるということを意味しているのである．したがって q_i に関する S_α のヤコビアンは零になることはできない．微分の順序は重要ではないから，このことは S_q の α_i に関するヤコビアンが零でないということと等価であり，これで（10－7）式の独立性が証明された．

$$p_i = p_i(\alpha, \beta, t). \tag{10-10}$$

このようにして，（10－9）式と（10－10）式はHamiltonの運動方程式の求める完全な解を構成する．

このように，Hamilton の主関数は，新しい座標と運動量が定数になるような正準変換の母関数である．したがって，**Hamilton-Jacobiの方程式を解けば，同時に力学の問題の解が得られる。**数学的にいえば，$2n$ 個の連立1階微分方程式である正準方程式と，1階偏微分方程式であるHamilton-Jacobiの方程式が等価であることが確立されたことになる．この対応は，ハミルトニアンに支配される方程式に限られるわけではない．事実，1階偏微分方程式の一般理論は，それと等価な連立1階常微分方程式の性質と，極めて深い関係があるのである．その関係は，本質的には偏微分方程式およびその正準方程式が，いずれも1つの共通の変分原理，この場合には変形されたHamiltonの原理に源を発している，という事実にまでさかのぼることができる．

新しい運動量としての α_i の選び方は，ある範囲で任意である．それらのかわりに，積分定数 α_i の独立な関数である任意の n 個の量 γ_i，

$$\gamma_i = \gamma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{10-11}$$

を選んでも少しも差支えない．これらの関係式を用いれば，Hamilton の主関数は q_i, γ_i, t の関数として書くことができ，それから後の導き方は，まったく同じように行われる．実際，Hamilton-Jacobi の方程式を積分するときに自然に出てくる積分定数を，そのまま新しい運動量として用いるよりも，ある特別な γ_i の組を用いる方が便利なことがしばしばある．

p. 442
S の時間に関する全導関数を調べれば，S の物理的意味はさらによくわかるであろう．S の全導関数は，公式，

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t},$$

から計算される．ここで，P_i は時間的に一定であるから，その導関数は現われない．（10－7）式と（10－3）式によって，この関係式はまた，

$$\frac{dS}{dt} = p_i \dot{q}_i - H = L, \qquad (10-12)$$

と書くことができる．それゆえ，Hamilton の主関数と，ラグランジアンの時間についての不定積分との差は高々定数であって，

$$S = \int L\,dt + \text{constant}, \qquad (10-13)$$

である．ところで，Hamilton の原理は，L の定積分の 1 つの性質についての命題であって，この原理から，Lagrange の方程式を経由して，力学の問題の解が得られるのである．ここでは，同じ作用積分が，不定積分の形で，問題を解く他の方法を与えている．しかし，実際の計算では，(10－13) 式のように書いてもなんの助けにもならない．なぜなら，q_i，p_i が時間の関数として知られていなければ，すなわち問題が解けてしまわなければ，ラグランジアンの時間についての積分を計算することはできないからである*．

10－2　Hamilton-Jacobiの方法の例としての調和振動子の問題

力学系の運動を求めるために Hamilton-Jacobi の方法を用いる例として，1 次元の調和振動子という簡単な問題について詳しい計算をしてみよう．ハミルトニアンは，

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2) \equiv E, \qquad (10-14)$$

である．ここで，

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (10-15)$$

p.443 であって，k は力の定数である．p を $\partial S/\partial q$ とおいてハミルトニアンに代入すれば，S に対する Hamilton-Jacobi の方程式が得られる．すなわち新しいハミルトニアンが零にならなければならないという要求から，

---

*) 歴史的には，Hamilton-Jacobi の方程式から，どのようにして力学の問題の解が得られるか，ということが知られるよりも前に，Hamilton は L の時間積分が，ある偏微分方程式の 1 つの特解であることに気づいたのである．その逆が成立すること，すなわち，正準変換の手法によって，Hamilton-Jacobi の方程式の完全解はどれでも，系の運動を記述するのに用いることができる，ということに気づいたのは Jacobi であった．

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+m^2\omega^2q^2\right]+\frac{\partial S}{\partial t}=0, \qquad (10-16)$$

となる．S が t に陽に依存しているということは，左辺の最後の項だけに効いてくるから，(10−16)式の1つの解を見出すためには，S を，

$$S(q,\alpha,t)=W(q,\alpha)-\alpha t, \qquad (10-17)$$

という形におけばよい．ここで α は積分定数である（この α は後に，変換された運動量に選ばれることになる）．解をこのような形に選ぶと，(10−16)式から時間 t を消去することができて，方程式は，

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2+m^2\omega^2q^2\right]=\alpha, \qquad (10-18)$$

になる．このように，積分定数 α は全エネルギー E と同一視することができる．このことはまた，(10−17)式と，関係式（(10−3)式を参照），

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H=0,$$

から直接に認めることができる．それは，この関係式は，

$$H=\alpha,$$

となるからである．(10−18)式は直ちに積分できて，

$$W=\sqrt{2m\alpha}\int dq\sqrt{1-\frac{m\omega^2q^2}{2\alpha}},$$

となり，したがって，

$$S=\sqrt{2m\alpha}\int dq\sqrt{1-\frac{m\omega^2q^2}{2\alpha}}-\alpha t, \qquad (10-19)$$

が得られる．(10−19)式の積分を実行することは，特にむずかしいわけではないが，われわれの求めるのは S 自身ではなくて，その偏導関数であるから，ここで積分計算を行う必要はない．q に対する解は，変換式(10−8)から次のように得られる．

$$\beta=\frac{\partial S}{\partial\alpha}=\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\int\frac{dq}{\sqrt{1-\frac{m\omega^2q^2}{2\alpha}}}-t.$$

この積分は容易に行うことができて，

$$t+\beta=\frac{1}{\omega}\arcsin q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}}\,, \qquad (10-20)$$

p. 444
となる．(10－20)式は，直ちに“裏返えす”ことができて，q が t および2つの積分定数 α，β の関数として次のように与えられる．

$$q=\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}\sin\omega(t+\beta)\,. \qquad (10-21)$$

これは良く知られた調和振動子に対する解である．形式的には，運動量に対する解は変換式(10－7)から求められ，これは(10－18)式を用いて，次のように書くことができる．

$$p=\frac{\partial S}{\partial q}=\frac{\partial W}{\partial q}=\sqrt{2m\alpha-m\omega^2q^2}.$$

q に対する解(10－21)式と関連づけると，これは，

$$p=\sqrt{2m\alpha(1-\sin^2\omega(t+\beta))},$$

あるいは，

$$p=\sqrt{2m\alpha}\cos\omega(t+\beta), \qquad (10-22)$$

となる．もちろん，この結果は p を単に $m\dot{q}$ に等しいとして検算することができる．

ここでの話を完結するためには，定数 α と β が $t=0$ における初期条件，q_0，p_0 と結びつけられなければならない．(10－21)と(10－22)式を2乗することによって，α が q_0 および p_0 を用いて，次の式で与えられることは明らかである．

$$2m\alpha=p_0^2+m^2\omega^2q_0^2. \qquad (10-23)$$

もちろん，これと同じ結果は，前に述べたように α を保存される全エネルギーと同一視することからも直ちに導かれる．最後に，位相定数 β は，q_0 および p_0 と，

$$\tan\omega\beta=m\omega\frac{q_0}{p_0}\,, \qquad (10-24)$$

によって関係づけられる．このように，Hamilton の主関数は，振動の位相角を測る新しい座標，および，全エネルギーと同一視される新しい正準運動量への１つの正準変換の母関数である．

q に対する解を，（10－19）式に代入すると，Hamilton の主関数は，

$$S = 2\alpha \int \cos^2 \omega(t+\beta)\,dt - \alpha t = 2\alpha \int \left(\cos^2 \omega(t+\beta) - \tfrac{1}{2}\right) dt,$$

と書くことができる．さて，ラグランジアンは，

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2m}(p^2 - m^2\omega^2 q^2) \\ &= \alpha(\cos^2 \omega(t+\beta) - \sin^2 \omega(t+\beta)) \\ &= 2\alpha(\cos^2 \omega(t+\beta) - \tfrac{1}{2}), \end{aligned}$$

p. 445
であり，したがって S はラグランジアンの時間についての積分になっており，これはちょうど一般的な関係式（10－13）と一致している．このことは，問題の解が求められた後でなければ証明することができなかったことに注意しよう．

10－3 Hamiltonの特性関数に対するHamilton-Jacobiの方程式

調和振動子に対する Hamilton-Jacobi の方程式を積分することができたのは，主として，S を座標 q だけを含む部分と，時間 t だけを含む部分とに分けることができたからであった．**もとのハミルトニアンが時間を陽に含んでいないときにはいつでも**，そのような変数分離を行うことができるのである．

もし H が t を陽に含まない関数であるならば，S に対する Hamilton-Jacobi の方程式は次のようになる．

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0.$$

第１項は，S の t に対する関数関係だけを含み，一方，第２項は，S の q_i に対する関係だけを含んでいる．それゆえ，解 S が，

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t, \qquad (10-25)$$

の形をもつと仮定すれば，時間変数 t を分離することができる．この試行関数

(trial function)を代入してみると，微分方程式は，

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1, \qquad (10-26)$$

となり，この式はもはや時間を含まない．そして，Sの中に現われる積分定数の1つ，すなわちα_1は，この場合一定の値をもつHに等しい（通常Hはエネルギーであるが，必ずしもそうでない場合もあることに注意しなければならない．第8－2節参照）．

時間を含まない関数Wは，ここでは単にHが保存されるときの母関数Sの一部として現われている．ところが，Wはまた別にそれ自身で，Sによって引き起こされるものとはまったく異なった性質の，接触変換を引き起こすことを示すことができる．新しい運動量がすべて運動の定数α_iになり，そして特にα_1が運動の定数Hになるような1つの正準変換を考えてみよう．この変換の母関数を$W(q, P)$と書けば，変換方程式は次のようになる．

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}. \qquad (10-27)$$

これらの式は，Hamilton の主関数Sに対する式(10－9)および(10－8)に似てはいるけれども，いまの場合Wを定める条件は，Hが新しい運動量α_1に等しくなければならないということである．すなわち，

$$H(q_i, p_i) = \alpha_1.$$

p. 446
(10－27)式を用いれば，この要求は，Wに対する偏微分方程式，

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1,$$

になるが，これは(10－26)式と同じ方程式であることがわかる．Wは時間を含まないから，もとのハミルトニアンと新しいハミルトニアンとは等しく，それゆえ $K = \alpha_1$ が導かれる．

このように，**Hamilton の特性関数**(*Hamilton's characteristic function*)として知られている関数Wは，すべての新しい座標がサイクリックになるような正準変換を引き起こすのである．前章で注意したように，Hが運動の定数で

あるときには，このような性質をもつ正準変換が求まれば，実質的には力学の問題は解けることになる．なぜなら，その場合には，新しい変数に対する運動方程式を積分することは難かしくないからである．実際，P_i に対する正準方程式は，単に，サイクリック座標に共役な運動量は，すべて定数であることを繰り返し述べているにすぎない．

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \qquad P_i = \alpha_i. \tag{10-28a}$$

そして新しいハミルトニアンは，運動量 α_i の中の唯1つだけの関数であるから，$\dot{Q}_i$ に対する運動方程式は，

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} &= 1 \qquad i = 1,\\ &= 0 \qquad i \neq 1,\end{aligned}$$

となり，その解は直ちに，

$$\begin{aligned}Q_1 &= t + \beta_1 \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_1},\\ Q_i &= \quad\ \beta_i \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \qquad i \neq 1,\end{aligned} \tag{10-28b}$$

として得られる．単なる運動の定数でない座標は Q_1 だけであって，それは時間とある定数の和になる．ここでわれわれは，時間を1つの正準座標と考えたとき，それに共役な運動量がハミルトニアンになる，という関係を示す別の例に出会ったわけである．

もとの座標 q_i に対する W の関数関係は，偏微分方程式（10－26）によって決定されるが，それはまた（10－3）式と同じように，Hamilton-Jacobiの方程式と呼ばれる．今度は完全解には n 個の積分定数が存在し，そのうちの1つは再び単なる付加定数でなければならない．残りの $n-1$ 個の独立な定数 α_2, $\ldots,\alpha_n$ は，α_1 と合わせて，一定の値をもつ新しい運動量として用いることができる．（10－27）の前半の式を t_0 において計算すれば，n 個の定数 α_i と，q_i，p_i の初期値との間の関係が得られる．最後に，（10－28b）式は q_i について解
p. 447 くことができて，q_i は α_i, β_i および t の関数として与えられ，問題は完全に解

かれる．(10－28b)式のうち，$(n-1)$個の式は時間を含んでいないことに注意しよう．q_iのうちの1つは独立変数に選ぶことができるが，そうすれば，残りの座標は，これら$(n-1)$個の時間を含まない方程式だけを解いて，この座標の関数として表わすことができる．このようにすれば，直接に運動の**軌道の方程式**(*orbit equations*)を導くことができる．例えば，中心力場における運動に対しては，この方法によって，r，θの各々を時間の関数として求めなくても，rをθの関数として与えることができる．

α_1およびWの中の積分定数を，新しい一定の運動量にとることは必ずしも必要ではない．場合によっては，むしろα_iのn個の独立な関数のある特定の組を，変換された運動量として用いる方が望ましいことがある．これらの定数をγ_iと書けば，特性関数Wはq_iおよびγ_iを独立変数として表わすことができる．このときには，ハミルトニアンは一般に2つ以上のγ_iを含み，Q_iに対する運動方程式は，

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \gamma_i} = v_i,$$

となる．ここでv_iはγ_iの関数である．この場合には，新しい座標はすべて時間の1次関数である．

$$Q_i = v_i t + \beta_i. \qquad (10-29)$$

特性関数Wは，Sと同じような物理的意味をもっている．Wは時間を陽に含まないから，その時間に関する全導関数は，

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_i}\dot{q}_i = p_i \dot{q}_i,$$

となり，したがって，

$$W = \int p_i \dot{q}_i \, dt = \int p_i \, dq_i, \qquad (10-13')$$

である．この積分は，第8－6節で用いたように，短縮された作用を定義する積分であることがわかるであろう．しかし，こういうことがわかっても，やはり大して実際的には役に立たない．Hamilton-Jacobiの方程式の完全な積分を求めないで，前もってWを計算することはできないからである．力学の問題を

解くに当って，Hamilton の主関数を用いる場合と，Hamiltonの特性関数を用いる場合との両方について，その手続を以下に表の形にまとめておこう（左側の列は主関数，右側の列は特性関数を用いる場合である）.

これら２つの解法は，ハミルトニアンHがそれぞれ次の形のときに適用できる.

Hが q,p,t の任意の関数のとき， $$H(q,p,t).$$	Hが保存されるとき， $$H(q,p)=一定$$

まず，次のような性質をもつ新しい変数への正準変換を探す.

すべての座標および運動量 Q_i, P_i が運動の定数になる.	すべての運動量 P_i が一定になる.

p.448
これらの要求を満足させるためには，新しいハミルトニアンに対して次のことを要求すれば十分である.

新しいハミルトニアンが恒等的に零である. $$K=0.$$	新しいハミルトニアンにおいて，すべての座標がサイクリックである. $$K=K(P_i)=\alpha_1.$$

これらの条件の下では，新しい運動方程式は次の形になる.

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial K}{\partial P_i}=0,$$ $$\dot{P}_i=-\frac{\partial K}{\partial Q_i}=0.$$	$$\dot{Q}_i=\frac{\partial K}{\partial P_i}=\nu_i,$$ $$\dot{P}_i=-\frac{\partial K}{\partial Q_i}=0.$$

これらの運動方程式の解は直ちに得られて，

$$Q_i=\beta_i,$$ $$P_i=\gamma_i,$$	$$Q_i=\nu_i t+\beta_i,$$ $$P_i=\gamma_i,$$

となる．これらの解はそれぞれ要求された条件を満たしている.

このような変換を引き起こす変換の母関数は，

Hamiltonの主関数， $$S(q,P,t),$$	Hamiltonの特性関数 $$W(q,P),$$

であって，それらはHamilton-Jacobiの方程式を満足する．

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0.$$

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)-\alpha_1=0.$$

これらの方程式の完全解は，

n 個の付加的でない積分定数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ を含む．

（ $n-1$ ）個の付加的でない積分定数を含み，α_1 と合わせて n 個の独立な定数の組 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ を作る．

新しい運動量は定数，すなわち $P_i=\gamma_i$ であって，それらを n 個の積分定数の n 個の任意の独立な関数として選ぶことができる．

$$P_i=\gamma_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

$$P_i=\gamma_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

それゆえ，Hamilton-Jacobiの方程式の完全解は，新しい運動量の関数であると考えることができる．

$$S=S(q_i,\gamma_i,t).$$

$$W=W(q_i,\gamma_i).$$

p. 449

特に，γ_i としては α_i 自身をとってもよい．そうすると，変換式の前半，すなわち，

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i},$$

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i},$$

は自動的に満足される．なぜなら，これらの関係式は，Hamilton-Jacobiの方程式を作るときに用いられているからである．変換式の残りの半分，

$$Q_i=\frac{\partial S}{\partial \gamma_i}=\beta_i,$$

$$Q_i=\frac{\partial W}{\partial \gamma_i}=v_i(\gamma_j)t+\beta_i,$$

は，q_i について解くことができ，q_i は t と $2n$ 個の定数 β_i,γ_i によって表わされる．そこで，この $2n$ 個の定数を，座標と運動量の初期値 (q_{i0},p_{i0}) で表わせば，問題は完全に解かれたことになる．

ハミルトニアンが時間を陽に含まないときには，どちらの方法を用いてもよく，その場合には各々の変換に対する母関数の間には，

$$S(q,P,t)=W(q,P)-\alpha_1 t,$$

の関係がある．

10−4 Hamilton-Jacobiの方程式の変数分離

前節で述べたことから， Hamilton-Jacobiの方法を導入しても，あまり実際的な利点はないように思われるかも知れない．正準運動方程式を形づくる $2n$ 個の常微分方程式を解くかわりに，今度はHamilton-Jacobi の偏微分方程式を解かなければならないが，良く知られているように，偏微分方程式を解くことは極めて複雑だからである．しかしながら，ある条件の下では，Hamilton-Jacobi の方程式において変数を分離することができ，そのときには常に，解を求積法に帰着させることができる．実際的には，そのような変数分離を行うことができる場合にのみ，Hamilton-Jacobiの方法は計算の手段として有用なのである．

Hamilton-Jacobi方程式において，１つの座標 q_j が分離可能であるといわれるのは，次のようなときである．すなわち，（例えば）Hamiltonの主関数が２つの部分の和となり，その１つの項は座標 q_j のみに依存し，もう１つの項は全く q_j に独立な場合である．このようにして，もし q_1 を１つの分離可能な座標とすると，ハミルトニアンは，

$$\dot{S}(q_1,\ldots,q_n;\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t)=S_1(q_1;\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t)$$
$$+S'(q_2,\ldots,q_n;\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t), \qquad (10-30)$$

と書くことができ，かつHamilton-Jacobiの方程式が２つの方程式 ——１つは S_1 に対するものと，他の１つは S' に対するもの ——に分離することができるようなものでなければならない．同じように，もし問題になっている座標のすべてが分離可能であるならば， Hamilton-Jacobiの方程式は**完全分離可能**（*completely separable*）（あるいは単に**分離可能**（*separable*））**である**といわれる．そのときには，

$$S=\sum_i S_i(q_i;\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t), \qquad (10-31)$$

p. 450
の形のHamiltonの主関数に対する１つの解は，Hamilton-Jacobi の方程式を，

$$H_i\left(q_i;\frac{\partial S_i}{\partial q_i};\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)=\alpha_i, \qquad (10-32)$$

の形の n 個の方程式（和はとらない！）に分離するであろう．定数 α_i はこの場合に**分離定数**（*separation constants*）と呼ばれる．方程式（10－32）のおのおのは，座標 q_i のうちの唯一つと，それに対応する q_i についての S_i の偏導関数のみを含んでいる．それゆえ，それらは特に簡単な形の常微分方程式の組である．それらの微分方程式は，1階であるから，常に求積法に帰着させることができる．すなわち，われわれは，q_i に関する S_i の偏導関数について解き，それから q_i について積分しさえすればよい．

Hamilton の主関数 S から，保存力学系に対する特性関数へ移ることは，t が Hamilton-Jacobi の方程式の中の分離可能な変数であるような1つの例として取り扱うことができる．そのような場合には，（10－30）式に示されている形に対応する形の S に対する1つの解を求める．

$$S(q,\alpha,t) = S_0(\alpha,t) + W(q,\alpha). \tag{10－32'}$$

そのような仮定の下では，H は t の陽な関数ではないから，この試みの解に対する Hamilton-Jacobi の方程式は，

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0, \tag{10－33}$$

となる．方程式（10－33）の第1項は t には独立であって，q_i だけに依存することができ，一方 第2項は t の関数でありうるにすぎない．したがって，この方程式が成立するのは，2項が共に，同じ大きさで反対符号の定数に等しい場合に限られる．

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = -\alpha_1, \tag{10－34a}$$

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1. \tag{10－34b}$$

第1の方程式は，（10－17）と（10－25）式におけるように，$S_0 = -\alpha_1 t$ として解かれ，一方，第2の方程式は W に対する Hamilton-Jacobi の方程式である．このように，ハミルトニアンの定数値 α_1 は，この方法では分離定数の形をとって現われる．

Hamilton-Jacobiの方程式を，時間変数を分離しないで解くことができるような例を見つけることはできる（例えば演習問題8）．それにもかかわらず，Hamilton-Jacobiの方程式のほとんどすべての有用な応用は，時間を陽には含まないハミルトニアンをもつものであって，それゆえ t は分離可能な変数である．したがって，分離可能性に関する以下の議論は，Hが運動の定数であるような系に制限され，Hamiltonの特性関数Wが専ら用いられるであろう．

p. 451
任意のサイクリックあるいはイグノラブル（ignorable）座標が分離できるということは容易に示すことができる．q_1がサイクリック座標であるとしよう．そうすると共役な運動量 p_1 は定数である．これを γ としよう．そのときWに対する Hamilton-Jacobiの方程式は，

$$H\left(q_2,\ldots,q_n;\gamma;\frac{\partial W}{\partial q_2},\ldots,\frac{\partial W}{\partial q_n}\right)=\alpha_1, \qquad (10-35)$$

である．もし，試みに分離された解を

$$W=W_1(q_1,\alpha)+W'(q_2,\ldots,q_n;\alpha), \qquad (10-36)$$

の形に置いてみるならば，（10－35）式は分離された関数W'だけを含み，一方W_1は次の方程式の解であることが明らかになる．

$$p_1=\gamma=\frac{\partial W_1}{\partial q_1}. \qquad (10-37)$$

このように，定数 γ は分離定数であって，W_1に対する明らかな解（自明の付加定数を除き）は，

$$W_1=\gamma q_1,$$

であり，Wは，

$$W=W'+\gamma q_1, \qquad (10-38)$$

で与えられる．（10－38）式と，Hが時間の陽な関数でないときにSがとる形，（10－25）式の間には明らかに類似性がある．事実，両方の式は共に似たような事情の下で生ずるものと考えることができる．われわれは，t はある意味で，その正準運動量として $-H$ をもつ１つの一般化座標と考えてよいことを知って

いる．（8－58）式参照．もしHが保存されるならば，tは1つのサイクリック座標として取り扱ってもよい．そのときには（10－34a）式は，（10－37）式に直接対応していて，同じような解を与える．

座標のうちの1つを除くすべての座標がサイクリックであるならば，上で用いた手続きを繰り返し適用することによって，Hamilton-Jacobiの方程式は，完全に分離することができる．その分離を明確に示すためには，今度はq_1が**サイクリックでない**座標を表わし，したがってすべての共役な運動量p_i, $i>1$，は定数$\alpha_2, \ldots, \alpha_n$であるとするのが便利である．唯1つのサイクリック座標に対して行ったのと同じ手続きに従えば，このときWに対する分離形は次のようになる．

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i(q_i, \alpha) = W_1(q_1, \alpha) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i q_i, \qquad (10-39)$$

（（10－38）式を参照せよ）．ここでW_1は，換算された（reduced）Hamilton-Jacobiの方程式，

$$H\left(q_1; \frac{\partial W_1}{\partial q_1}; \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) = \alpha_1, \qquad (10-40)$$

p. 452
の解である．これは，独立変数q_1に関する1階常微分方程式であるから，直ちに求積法に帰着され，Wに対する完全解を得ることができる．*

一般に，もしq_jとそれに共役な運動量が，ハミルトニアンの中で，他のどの変数も含まないある関数$f(q_j, p_j)$の形に分離することができるならば，座標q_jは分離することができる．そのときに，q_iはq_jを除くすべての　qの組を表わすとして，

$$W = W_j(q_j, \alpha) + W'(q_i, \alpha),$$

*）（10－39）式の形はまた，次のような考察からも得ることができる．まず，Wはすべての座標がサイクリックになるような新しい座標への変換の母関数であることを思い出そう．しかし，もし$q_2, \cdots, q_n$がすでにサイクリック座標になっていれば，それらに対してはあらためて変換をする必要はない．すなわち，Wはサイクリック座標に関する限り，恒等変換とすることができる．ところでα_iは新しい運動量であるから，（10－39）式の中の和の部分は，

$$\sum_{i=2}^{n} q_i P_i,$$

と書くことができる．これが座標$q_2, \cdots, q_n$に対する恒等変換の母関数であることは，明らかであろう（方程式（9－25）を見よ）．

の形の試行関数を探すならば，Hamilton-Jacobiの方程式は，

$$H\left(q_i, \frac{\partial W'}{\partial q_i}, f\left(q_j, \frac{\partial W_j}{\partial q_j}\right)\right) = \alpha_1\,, \qquad (10-41)$$

となる．少なくとも原理的には，(10－41)式は f に対して解く形に裏返すことができる．

$$f\left(q_j, \frac{\partial W_j}{\partial q_j}\right) = g\left(q_i, \frac{\partial W'}{\partial q_i}, \alpha_1\right). \qquad (10-42)$$

(10－33)式に関連して前に用いた議論は，わずかに異なった仕方でここでも成り立つ．f は q_j を除くどの座標 q の関数でもない．他方 g は q_j には独立である．それゆえ，(10－42)式は，両辺がすべての q に無関係なある定数に等しい場合にのみ成立することができる．

$$\begin{aligned} f\left(q_j, \frac{\partial W_j}{\partial q_j}\right) &= \alpha_j, \\ g\left(q_i, \frac{\partial W'}{\partial q_i}\right) &= \alpha_j. \end{aligned} \qquad (10-43)$$

これで変数の分離がなし遂げられる．

Hamilton-Jacobiの方程式の変数分離可能性は，含まれている物理的な問題だけではなく，用いられる一般化座標の選び方にも依存するということは，強調されなければならない．このように，中心力の1体問題は，極座標では分離可能であるが，直交座標では分離可能ではない．いくつかの問題に対しては，Hamilton-Jacobiの方程式を完全に変数分離することは全く不可能である．有名な3体問題はその1つの例である．他方，力学や原子物理学の多くの基本的な問題では，1つより多くの座標の組に対して変数分離が可能である．一般に，変数が完全に分離可能であるときに限って，Hamilton-Jacobi の方程式を閉じた形に解くことが実行できる．それゆえ，各問題に対して，分離可能な座標系を見出すためには，かなりの創意工夫がされなければならなかった．

p. 453

ある特定の問題に対して，どの座標系が分離可能なHamilton-Jacobiの方程式を与えるかということを示す簡単な判定法はない．直交座標系については，いわゆるStaeckel の条件が有用であることはわかっている．それは，ある状

況において，分離可能性に対する必要かつ十分な条件を与える．この条件が十分条件であることの証明は付録Dに与えてある(そこにはまたこの問題に関する参考文献のリストが載せてある)．Staeckelの条件自身を，それらの応用の例と共にここで述べておこう．

われわれの関心をもつ状況の型には，つぎの制限をおく．

1. ハミルトニアンは保存される．

2. ラグランジアンは一般化速度の2次以上の関数ではなく，それゆえ，ハミルトニアンは次の形をもつ((8－19)式参照)．

$$H = \tfrac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{a})\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{a}) + V(q). \qquad (10-44)$$

3. 一般化座標の組 q_i は座標の直交系を形づくる．それゆえ $\mathbf{T}$ は対角型である．このことから，逆行列 $\mathbf{T}^{-1}$ もまた対角型であり，その零でない要素は次のようになる．

$$(\mathbf{T}^{-1})_{ii} = \frac{1}{T_{ii}} \qquad (\text{和はとらない}). \qquad (10-45)$$

これらの条件を満足する問題と座標に対して，Staeckelの条件は，もし次の条件が満たされるならば，Hamilton-Jacobiの方程式は完全に分離されるということを述べるものである．

a．ベクトル $\mathbf{a}$ の要素 a_i は，対応する座標のみの関数である．すなわち，

$$a_i = a_i(q_i).$$

b．ポテンシャル関数 $V(q)$ は，次のような形の和として書くことができる．

$$V(q) = \frac{V_i(q_i)}{T_{ii}}. \qquad (10-46)$$

c．要素 $\phi_{ij} = \phi_{ij}(q_i)$ をもち，

$$(\phi^{-1})_{1j} = \frac{1}{T_{jj}} \qquad (\text{和をとらない}), \qquad (10-47)$$

であるような $n \times n$ 行列 ϕ が存在する．

p. 454

もし，Staeckelの条件が満足されるならば，Hamiltonの特性関数は完全に分離可能であって，

$$W(q) = \sum_i W_i(q_i),$$

となる．ここで W_i はつぎの形の方程式を満足する．

$$\left[\frac{\partial W_i}{\partial q_i} - a_i\right]^2 = -2V_i(q_i) + 2\phi_{ij}\gamma_j. \qquad (10-48)$$

ここに γ_j は積分定数である（また和は j についてだけとられる）．

これらの条件は，神秘的でまた複雑に見えるけれども，それらの応用は通常かなり直接的である．ここで展開された分離可能性についての考え方の例として，中心力の場で運動している，1個の粒子に対する Hamilton-Jacobi の方程式を極座標で論じてみよう．その後， この問題を，Staeckel の条件の応用を与えるように，任意のポテンシャル法則にまで一般化しよう．

まず，軌道平面内にある極座標 (r, ψ) を用いて，中心力問題を考察する．そのときには，運動は2自由度のものであって，ハミルトニアンは次の形をもっている．

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r^2}\right) + V(r). \qquad (10-49)$$

そしてこのハミルトニアンは ψ についてはサイクリックである．その結果，Hamilton の特性関数は，

$$W = W_1(r) + \alpha_\psi \psi, \qquad (10-50)$$

となる．ここに α_ψ は，ψ に共役な一定の角運動量 p_ψ である．そうすると，Hamilton-Jacobi の方程式は次のようになる．

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\psi^2}{r^2} + 2mV(r) = 2m\alpha_1. \qquad (10-51)$$

ここに α_1 は物理的には系の全エネルギーとみなされる定数である．(10－51) 式を W_1 の偏導関数について解くと，

$$\frac{\partial W_1}{\partial r} = \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}},$$

となり，したがって W は，

$$W = \int dr \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}} + \alpha_\psi \psi, \qquad (10-52)$$

p. 455
となる．特性関数に対してこの形を用いると，変換方程式（10－28b）は，

$$t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int \frac{m\,dr}{\sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}}}, \qquad (10-53a)$$

および，

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\psi} = -\int \frac{\alpha_\psi\,dr}{r^2\sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}}} + \psi, \qquad (10-53b)$$

となる．（10－53a）式は r を t の関数として与え，α_1 と α_ψ をそれぞれ E および l と陽に書けば，第 3 章で見出された対応する解（3－18）式に一致する．Q_i に対する残りの変換方程式は，ここでは（10－53b）式だけであるが，軌道方程式を与えるということは前に注意した．（10－53b）式における積分変数を $u = 1/r$ に変換すると，方程式は

$$\psi = \beta_2 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{\alpha_\psi^2}(\alpha_1 - V) - u^2}},$$

に帰着される．これは，ψ を θ，および β_2 を θ_0 とみなせば，前に見出された（3－37）式と一致する．

変数分離のもう 1 つの例として，同じ中心力問題を球面極座標において調べてみよう．すなわち，軌道が 1 平面内にあるということをわれわれはあらかじめ知ってはいないものとするのである．この場合のハミルトニアンは次の形であることはすでに示されている（（8－21）式参照）．

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + V(r). \qquad (10-54)$$

これに対応する Hamilton-Jacobi の方程式の中の変数が分離可能であるならば，Hamilton の特性関数は，

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi), \qquad (10-55)$$

の形を持たなければならない．座標 ϕ はハミルトニアンにおいてサイクリック

であって，それゆえ，

$$W_\phi = \alpha_\phi \phi \,, \tag{10-56}$$

である．ここに α_ϕ は積分定数である．W に対してこの形を用いれば，Hamilton-Jacobiの方程式は次のようになる．

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta}\right] + 2mV(r) = 2mE. \tag{10-57}$$

p. 456
ここでわれわれは，一定なハミルトニアンを全エネルギー E と明示した．θ に，そして θ のみに対するすべての依存性は，角括弧の中の表式に分離されたことに注意しよう．そうすると，Hamilton-Jacobi の方程式は（10－41）式の形と同じ形となり，そしてそこで述べた議論に従って，角括弧の中の量は1つの定数に等しくなければならない．

$$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2. \tag{10-58}$$

最後に，W の r に対する依存性は，Hamilton-Jacobiの方程式の残りの部分によって，次のように与えられる．

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m(E - V(r)). \tag{10-59}$$

このようにして，Hamilton-Jacobiの方程式の中の変数は完全に分離された．方程式（10－58）と（10－59）は容易に求積法に帰着させることができ，$W_\theta(\theta)$ と $W_r(r)$ に対してそれぞれ，少なくとも形式的な解は与えられる．

積分定数 $\alpha_\phi, \alpha_\theta, \alpha_1$ は，すべて直接的に理解できる物理的意味をもっていることに注意しよう．量 α_ϕ は，もちろん，極軸のまわりの角運動量の一定の値である．すなわち，

$$\alpha_\phi = p_\phi = \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi}. \tag{10-60}$$

α_θ が何であるかを見るために，（10－58）式は次のように書くことができることに注意する．

$$p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2. \tag{10-58$'$}$$

したがって，ハミルトニアン（10－54）式は次のようになる．

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}\right) + V(r). \qquad (10-54')$$

軌道平面内の極座標を用いて表わされたハミルトニアンについての（10－49）式と比較すると，α_θ は p_ψ すなわち全角運動量の大きさと同じものであることが示される．すなわち，

$$\alpha_\theta = p_\psi \equiv l. \qquad (10-61)$$

最後に，α_1 はいうまでもなく全エネルギー E である．事実，W の3つの成分に対する3つの微分方程式は，保存則を述べているものと見なすことができる．（10－60）式は角運動量ベクトル **L** の z 成分が保存されることを述べており，他方，（10－58）式は角運動量の大きさ l の保存を述べている．そして（10－59）式は，エネルギー保存則の1つの形である．

この簡単な例で，Hamilton-Jacobi の方法の威力と見事さとが明白になり始

p. 457

めている．後わずか2,3のステップで，r の時間 t に対する関係と，軌道の方程式，（10－53aおよびb）式を得ることができる．この方法を知る以前には，この結果に到達するには，かなりの労力を必要としたものである．中心力問題に対する保存量も自動的に出てくる．純粋な中心力問題に対する変数の分離は，また他の座標系，たとえば放物線座標においても行うことができ，その場合には，保存量もその特定の座標系に適した形で出てくる．

最後に，Hamilton-Jacobi の方程式が，球面極座標において分離可能であるような，1個の粒子に対するスカラー・ポテンシャル V の最も一般的な形を見出すために，Staeckelの条件を用いることができる．Staeckelの条件における行列 $\boldsymbol{\phi}$ は，座標系のみに依存し，ポテンシャルにはよらない．Hamilton-Jacobi の方程式は，球面極座標において，少なくとも1つのポテンシャル，すなわち中心力ポテンシャルに対して変数分離が可能であるから，行列 $\boldsymbol{\phi}$ が確かに存在することが導かれる．われわれの質問に答えるためには，$\boldsymbol{\phi}$ の特定の形は必要でない.* さらに **a** は仮定によって零であるから，われわれのしなければならな

*) 球面極座標に対して適当な $\boldsymbol{\phi}$ の具体的な形については付録Dを見よ．

いことは，(10－46) 式を適用して最も一般的な分離可能な V の形を見出すことだけである．運動エネルギー (513 ページを見よ) から，Tの対角要素は，

$$T_{rr} = m, \qquad T_{\theta\theta} = mr^2, \qquad T_{\phi\phi} = mr^2 \sin^2\theta \ ,$$

である．(10－46) 式によって，求めるポテンシャルは次の形を持たなければならないことが導かれる．

$$V(q) = V_r(r) + \frac{V_\theta(\theta)}{r^2} + \frac{V_\phi(\phi)}{r^2 \sin^2\theta}. \qquad (10-62)$$

このポテンシャルの形であれば，Hamilton-Jacobi の方程式が球面極座標においてやはり完全に変数分離可能であることを直接に示すことは容易にできる．

10－5　1自由度の系における作用-角変数

物理学の多くの分野において，周期的な運動をする系はとくに重要である．このような問題においては，われわれは軌道のこまかい点についてはそれ程関心を持たないが，運動の振動数に関心を持つことが非常に多い．そのような系を取り扱う極めてすぐれた，そして有力な方法の1つは，Hamilton-Jacobi の方法を変形することによって与えられる．この方法では，Hamilton-Jacobi の方程式の解の中に直接現われてくる積分定数 α_i 自身を，新しい運動量に選ばないで，そのかわりに適当に定義された定数 J_i を用いる．この定数は，α_i の n 個の独立な関数の組を形づくるものであって，**作用変数** (*action-variable*) として知られているものである．

簡単のために，この節ではまず1自由度の系を考えよう．系は保存的であると仮定する．したがってハミルトニアンは，

$$H(q, p) = \alpha_1 \ ,$$

p. 458
と書くことができる．これを運動量について解けば，

$$p = p(q, \alpha_1), \qquad (10-63)$$

が得られる．これは，ハミルトニアンが一定の値 α_1 を持つときに，系の点が2次元位相空間の中で描く軌道の方程式と見なすことができる．“周期運動”とい

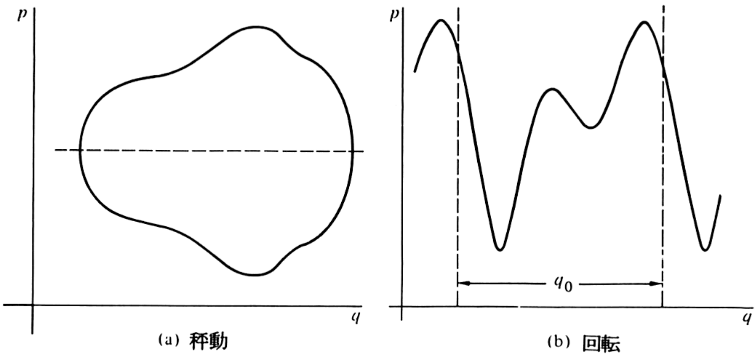


図 10－1
1次元系の周期運動に対する，位相空間における系の代表点の軌道.

う言葉の意味することは，位相空間における軌道の特徴によって決定される. 周期運動は2つの型に分類される.

1. 第1の型では，その軌道は図 10－1(a) に示されているように**閉じて**おり，系の代表点は周期的にその軌跡を繰り返してたどる. そのときには，q と p の両方が，同じ振動数をもつ時間の周期関数である. このような性質をもつ周期運動は，系の代表点の最初の位置が，運動エネルギーの2つの零点の間にあるときに見出されるであろう. このような運動は，天文学的な秤動 (*libration*) という名前で示されることがある. しかしながら，物理学者に対しては，1次元調和振動子のような，普通の振動的な系を思い起こさせることの方が多いようである.

2. 周期運動の第2の型では，位相空間における軌道が，p が q の，周期 q_0 をもつ周期関数になるようなものであって，これは図 10－1(b) に示されている. この型の運動は，言い換えれば，q がある値 q_0 だけ増加したときに，系の配置が本質的には初めの配置と変わらないようになることを意味する. 最もなじみ深い例は，q を回転角としたときの，固定軸のまわりの剛体の回転運動である. q を 2π だけ増しても，系の状態には本質的な変化は生じない. 実際，

この型の周期性をもつ位置座標は常に回転角なので，そのような運動は，秤動と対照的に，単に回転（*rotation*）と呼ばれる*．この場合には，q はもはや有界ではなく，いくらでも大きくなることができる．

p. 459 このような考え方をはっきりさせるためには，同じ物理系において，両方の型の周期運動が起こり得るという点に注目することが役に立つであろう．その古典的な例は単振子である．その場合に q はふれの角 θ である．振子の長さを l とし，ポテンシャル・エネルギーを支点において零にとるならば，系の一定の(全)エネルギーは，

$$E = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta, \qquad (10-64)$$

で与えられる．(10－64)式を p_θ について解くと，位相空間における系の点の軌道の方程式はつぎのようになる．

$$p_\theta = \pm\sqrt{2ml^2(E + mgl\cos\theta)}.$$

E が mgl より小さい場合には，系の物理的な運動は，$|\theta|$ が次の式で定義される限界 θ' よりも小さい範囲だけで起こり得る．

$$\cos\theta' = -\frac{E}{mgl}.$$

この条件の下では，振子は $-\theta'$ と $+\theta'$ の間を振動し，これは秤動型の周期運動である．そして系の代表点は，位相空間において，図10－2の曲線1のような軌道を描く．しかし，もし $E > mgl$ であるならば，θ のすべての値が物理的な運動に対応し，θ は限りなく増加することができて，回転型の周期運動が起こる．この場合に起こる運動は，物理的には次のように言い表わすことができる．すなわち，振動子は十分多くのエネルギーを持っているので，鉛直の位置 $\theta = \pi$ を乗り越えることができ，したがって回転しつづける．図10－2の曲線3は振子の回転運動に対応する位相空間内の軌道を表わしている．$E = mgl$ という極限の場合は，図10－2の曲線2および2′に示されている．このエネルギーでは，振子は $\theta = \pi$ すなわち鉛直の位置に，運動エネルギー零で，すなわち $p_\theta = 0$ で

---

*) ときには，循環（*circulation*）あるいは回転（*revolution*）とも呼ばれる．

到達する．そうすると，その位置は不安定な平衡にあって，原理的にはいつまでもその位置に留まり得ることになる．しかしながら，非常に小さい摂動が存在すれば，振子はその運動を，曲線2，あるいは切り換わって曲線2′に沿って続けるであろう．それは，これらいずれの方法でも落下することができるであろう．点 $\theta = \pi, p_\theta = 0$ は，ハミルトニアン関数 $H = E(p_\theta, \theta)$ の1つの鞍点（*saddle point*）であって，その鞍点において交わる，一定の E をもつ，位相空間における2つの道が存在する．われわれはここで，数学において関心を増しつつある，**分岐**（*bifurcation*）と呼ばれるようになった現象の（幸いまれにしか起こらない），1例を見たわけである．

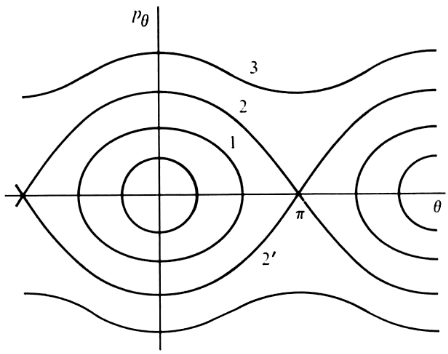


図 10－2
単振子に対する位相空間軌道．

周期運動のどちらの型に対しても，変換された（一定の値をもつ）運動量として，α_1 を置き換えるものとして，新しい変数 J を導入することができる．いわゆる作用変数（action variable）J は次のように定義される．

$$J = \oint p\,dq. \qquad (10-65)$$

ここで，積分は，場合に応じて，秤動あるいは回転の完全な1周期にわたって行われる（作用変数という名前は，（10－65）式と第8－6節の短縮された作用との類似に由来する．J はいずれの場合も角運動量のディメンションを持つ

ことに注意せよ）．（10－63）式から，Jは常にα_1のみのある関数であることが導かれる．

$$\alpha_1 \equiv H = H(J). \qquad (10-66)$$

それゆえ，Hamilton の特性関数は，

$$W = W(q, J), \qquad (10-67)$$

と書くことができる．**角変数**（*angle variable*）* wとして知られている，Jに共役な一般化座標は，次の変換式によって定義される．

$$w = \frac{\partial W}{\partial J}. \qquad (10-68)$$

これに対応して，wに対する運動方程式は，

$$\dot{w} = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = \nu(J), \qquad (10-69)$$

である．ここにνはJのみの定数関数である．（10－69）式は直ちに解けて，その解は，

$$w = \nu t + \beta, \qquad (10-70)$$

となり，したがってwは，ちょうど（10－29）式におけるように時間の１次関数である．

今までのところでは，作用－角変数は，Hamilton-Jacobi の方程式から導かれる変換された座標の一般的な場合の１つの特別な組以上のものではない．（10－68）式から，qはwとJの関数として解くことができ，これと（10－
p. 461 70）式を結びつけると，求めるqを時間の関数として解くことができる．しかし，このように用いたのでは，その変数はWによって生成される座標の他の組である以上に，意味のある利点は持たないことになる．それらの特別な価値は，むしろνに対して与えることのできる物理的意味から生じてくる．qが，秤動あるいは回転の完全な１周期を行うときにwに生じる変化を考えよう．それは

---

*）“作用－角変数”という名前は，最初K. Schwarzschild によって彼の画期的な論文の中で用いられた（Sitzungber. der Kgl. Akad. d. Wiss. 1916, p. 548）．不幸にして，この論文が第１次世界大戦によって悲劇的に短く終った，彼の輝かしい生涯を印すものとなった．

次の式で与えられる．

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq. \qquad (10-71)$$

（10－68）式によって，これはまた，

$$\Delta w = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q \, \partial J} dq, \qquad (10-72)$$

と書くことができる．J は定数であるから，J に関する偏微分は積分記号の外に出すことができて，

$$\Delta w = \frac{d}{dJ} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \frac{d}{dJ} \oint p dq = 1, \qquad (10-73)$$

とすることができる．ここで，（10－65）式の J の定義が用いられている．

（10－73）式は，q が完全な1周期を行うときに w は1だけ変化するということを述べている．ところが，（10－70）式から，q の完全なサイクルに対する周期を τ とするならば，

$$\Delta w = 1 = \nu\tau,$$

であることが導かれる．それゆえ，定数 ν は周期の逆数とみなすことができる．すなわち，

$$\nu = \frac{1}{\tau} \qquad (10-74)$$

であって，それゆえ ν は **q の周期運動に結びつけられた振動数**である．このように，作用-角変数を使えば，**系の運動に対する完全な解を見つけることなしに**，周期運動の振動数を得るための強力な手段が与えられる．上に与えた定義に従えば，1自由度の系が，周期的であることがもし前もって知られているならば，H が J の関数として決定されれば，その振動数を見出すことができる．そのときには，（10－69）式によって，H の J に関する導関数が直接，運動の振動数 ν を与える．w を角変数と呼ぶことは，（10－70）式の中の ν を振動数とみなすことから明かになる．また，J が角運動量の次元を持つことはすでに

注意してあり，角運動量に共役な座標はもちろん角である.*

p. 462
作用−角変数を用いて振動数を求める1つの例として，再びよく知られた1次元調和振動子の問題を考えてみよう.（10−18）式と，Jを定義する（10−65）式から，定数である作用変数Jはつぎの式によって与えられる.

$$J = \oint p\,dq = \oint \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2}\,dq.$$

ここにαは一定の全エネルギーであり，ωは$\omega^2 = k/m$で与えられる.

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}\sin\theta$$

を代入すると，積分は，

$$J = \frac{2\alpha}{\omega}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta, \qquad (10-75)$$

となる．ここで，積分限界はqの完全な1サイクルに対応するようにとられている．$\cos^2\theta$の完全な1サイクルにわたる平均値は1/2であるから，（10−75）式は単に，

$$J = \frac{2\pi\alpha}{\omega},$$

あるいは，αについて解いて，

$$\alpha \equiv H = \frac{J\omega}{2\pi}, \qquad (10-76)$$

となる．したがって，振動の振動数は，

$$\frac{\partial H}{\partial J} = \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (10-77)$$

となるが，これは1次元調和振動子の振動数に対する通常の公式である．解（10−21），（10−22）式をJおよびwで書くことは，振動数を求めるためには全く必要はないけれども，しかし教訓的である（そして後の応用のためにも有

*) いくつかの応用に対しては，作用変数が天体力学の文献において，（10−65）式で与えられている値の$(2\pi)^{-1}$倍として定義されている.（10−73）式によって，その場合には角変数はわれわれの定義の2π倍となり，νのかわりに角振動数ωが用いられる．しかしながら，われわれは以下でもずっと上に与えられた，物理学でなじんでいる定義を使うことにしよう．

用である）．まず，$\omega(t+\beta)$は，（10－77）と（10－70）式によって，積分定数を適当に定義し直すと，$2\pi w$と同じであることが認められるであろう．それゆえ，qに対する解，（10－21）式とpに対する解（10－22）式はつぎの形をとる．

$$q=\sqrt{\frac{J}{\pi m\omega}}\sin 2\pi w, \qquad (10-78)$$

$$p=\sqrt{\frac{mJ\omega}{\pi}}\cos 2\pi w. \qquad (10-79)$$

（10－78）と（10－79）式はまた，正準変数の組(w, J)から正準変数の組(q, p)への変換方程式とみなすこともできることに注意しよう．

p. 463

10－6　完全に変数分離可能な系に対する作用-角変数*

Hamilton-Jacobi の方程式が完全に変数分離可能であるような，1組あるいはそれより多くの座標の組が存在するときには，多くの自由度をもつ系のある型の運動に対して，作用-角変数を導入することができる．前と同じように，保存系だけを考えよう．したがって Hamiltonの特性関数が用いられる．完全な変数分離可能性は，正準変換の方程式がつぎの形を持つことを意味する．

$$p_i=\frac{\partial W_i(q_i;\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}{\partial q_i}. \qquad (10-80)$$

この変換式は，各 p_i を q_i と n 個の積分定数 α_j の関数として与える．すなわち，

$$p_i=p_i(q_i;\alpha_1,\ldots,\alpha_n). \qquad (10-81)$$

（10－81）式は1自由度系に適用されたときに得られる（10－63）式に対応するものである．ここでは，（10－81）式は系の代表点を，位相空間において(q_i, p_i)平面の上へ，射影した軌道の方程式であることがわかるであろう．(q_i, p_i)対のすべてに対する軌道方程式が，閉じた軌道を描くか（秤動，図10－1a），あるいは q_i の周期関数である（回転，図10－1b）ときには，その系に対して作用-角変数を定義することができる．

---

*）特に注意しない限り，この節では和の規約は用いられない．

運動をこのように特徴づけることは，必ずしも，q_i および p_i のおのおのが時間の周期関数であること，すなわち，一定の時間間隔をおいてそれらが同じ値を繰り返しとること，を意味しているのではないことは強調しておかなければならない．またたとえ，分離された (q_i, p_i) の組がこの意味で実際に周期的であったとしても，全体の系の運動は必ずしも周期的である必要はない．このように，3次元調和振動子において，3つの直交軸の方向に沿った運動の振動数はすべて異なっていてもよい．そのような例では，粒子の完全な運動は周期的でないかも知れないことは明らかである．これらの振動数が，互いに有理数の比になっていないならば，粒子は空間内で閉じた曲線は描かず，ある開いた“Lissajous の図形”を描くであろう．そのような運動は**多重周期的**（*multiply-periodic*）であると言われる．作用-角変数を用いることの利点は，それによって，運動の完全な解を求める必要なしに，多重周期運動に含まれるすべての振動数を計算できるということである．

（10－65）式と同様に，作用変数 J_i は，(q_i, p_i) 平面における軌道の完全な周期にわたる線積分によって定義される．

$$J_i = \oint p_i \, dq_i. \qquad (10-82)$$

もし分離座標の1つがサイクリックであるならば，それに共役な運動量は定数である．位相空間の q_i, p_i 平面における，これに対応する軌道は，水平な直線
p. 464
であって，これは周期運動の性質をもつようには見えない．実際，この運動は，q_i に任意の周期を与えてもよいような，回転型の周期性の極限の場合と考えることができる．回転周期性をもつ座標は常に角であるから，そのようなサイクリックな q_i は常に自然の周期 2π を持っている．したがって，サイクリックな角座標に対応する作用変数の定義の中の積分は，0 から 2π 迄として計算すべきである．それゆえ，すべてのサイクリックな変数に対しては，

$$J_i = 2\pi p_i \qquad (10-83)$$

である．

（10－80）式によって，J_i はまた，つぎのように書くことができる．

$$J_i = \oint \frac{\partial W_i(q_i; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial q_i} dq_i. \qquad (10-84)$$

q_i はここでは単に積分変数であるから，各作用変数 J_i はHamilton-Jacobiの方程式の解の中に現われる n 個の積分定数のみの関数である．さらに，別々の変数対 (q_i, p_i) の独立性から，J_i は α_i の n 個の独立な関数を形づくり，それゆえ，新しい一定の運動量の組として用いるのにふさわしいものである，ということが導かれる．α_i を作用変数の関数として表わすことによって，特性関数 W は，

$$W = W(q_1, \ldots, q_n; J_1, \ldots, J_n) = \sum_j W_j(q_j; J_1, \ldots, J_n),$$

の形に書くことができ，一方，ハミルトニアンは J_i だけの関数としてつぎのようになる．

$$H = \alpha_1 = H(J_1, \ldots, J_n). \qquad (10-85)$$

1自由度の系の場合と同様に，共役な角変数 w_i は，変換方程式によって定義することができ，それらはここではつぎの形になる．

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W_j(q_j; J_1, \ldots, J_n)}{\partial J_i}. \qquad (10-86)$$

w_i は，

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H(J_1, \ldots, J_n)}{\partial J_i} = \nu_i(J_1, \ldots, J_n), \qquad (10-87)$$

によって与えられる運動方程式を満足する．ν_i は定数であるから，すなわち，作用変数のみの関数であるから，角変数はすべて，時間の1次関数である．

$$w_i = \nu_i t + \beta_i. \qquad (10-88)$$

一般に別々の w_i は時間に対して異なった割合で増加することに注意せよ．

定数 ν_i は，多重周期運動の多くの振動数とみなすことができるが，その関係
p. 465
を示すための議論は1自由度の周期系に対するものよりも微妙である．変数の組 (w, J) への変換方程式は，各 q_j（および p_j）が定数 J_i と変数 w_i の関数であることを意味する．われわれが見出したいのは，q が w のどのような種類の数学的関数であるかということである．このことを見るために，変数 q_j のおの

おのおのが秤動あるいは回転において整数，m_j 回のサイクルを行うときに，特定の w_i に生ずる変化を調べてみよう．この純粋に数学的な手順を行うに当って，われわれは明らかに，系の時間的な運動に従っては行わない．それは，あたかも時間の流れを一時的にとめて，q のおのおのが，いわば人為的に，それらの運動のいくつかのサイクルにわたって独立に動かされるように行われる．事実上，われわれは，第1章の仮想変位を取り扱うのである．そこで，q_j が無限小だけ変化したときの w_i の無限小の変化を δw_i で表わそう．それは，

$$\delta w_i = \sum_j \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_j \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial q_j} dq_j,$$

で与えられる．ここで（10－86）式が用いられている．q_jに関する導関数は，Wを構成する項の中の W_j に対するものを除いては零になり，それゆえ，(10－80)式によって，δw_i はつぎのようになる．

$$\delta w_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_j p_j(q_j, J)\, dq_j. \qquad (10-89)$$

（10－89）式は，δw_i を各々が q_j の運動のみを含む，独立な寄与の和として表わしている．したがって，指定された手順の結果として生ずる w_i の全変化は，

$$\Delta w_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{m_j} p_j(q_j, J)\, dq_j,$$

である．J_i に関する微分演算子は積分記号の外に出すことができる．これは，q_i のサイクル運動を通じて，すべての J はもちろん定数だからである．積分記号の各々の下にある文字 m_j は，積分が q_j の m_j 回のサイクルについて行われるものであることを示す．しかし，各々の積分は，作用変数の定義によって，ちょうど $m_j J_j$ である．各 J は独立であるから，

$$\Delta w_i = m_i, \qquad (10-90)$$

が導かれる．さらに，もしどれかの q_j が整数のサイクルを完全に行わないならば，q_j についての積分の中にはサイクルの一部にわたる積分の残りがあることになり，Δw_i は整数の値をもたないであろう，ということに注意しよう．w

と m の組を，それぞれベクトル $\mathbf{w}$ と $\mathbf{m}$ として取り扱えば，（10－90）式はつぎのように書くことができる．

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{m}. \qquad (10-90')$$

まず，分離できる運動はすべて秤動型であって，各 q_j は，p_j と同様に，完全なサイクルを行った後にその最初の値に戻るものと仮定しよう．このときには，（10－90′）式で記述される結果は，つぎのような形に表現することができる．$\boldsymbol{\eta}$（q と p のベクトル）は，$\Delta\boldsymbol{\eta} = 0$ という変化が，$\Delta\mathbf{w} = \mathbf{m}$ という変
p.466
化に対応するような $\mathbf{w}$ の関数である．ここに $\mathbf{m}$ は整数の成分をもつベクトルである．q_j の選ばれた運動におけるサイクルの数は任意であるから，$\mathbf{m}$ は $m_i = 1$ を除き零ととることができ，そのとき $\boldsymbol{\eta}$ のすべての成分は不変のままであるか，初めの値に戻るかのいずれかである．それゆえ，最も一般的な場合には，$\boldsymbol{\eta}$ の成分は各 w_i の周期 1 の周期関数でなければならない．すなわち，q および p は，周期 1 をもつ w の多重周期関数でなければならない．そのような多重周期関数は，常に多重 Fourier 展開によって表わすことができる．それは，例えば q_k に対しては，つぎのようになる．

$$q_k = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{\infty} a_{j_1,\ldots,j_n}^{(k)} e^{2\pi i (j_1 w_1 + j_2 w_2 + j_3 w_3 + \cdots + j_n w_n)}. \qquad \text{（秤動）} \qquad (10-91)$$

ここで，j は $-\infty$ から $+\infty$ まで動く n 個の整数の組である．j の組も $\mathbf{w}$ と同じように，n 次元空間における 1 つのベクトルとして取り扱うことによって，上の展開はもっと簡潔に，

$$q_k = \sum_{\mathbf{j}} a_{\mathbf{j}}^{(k)} e^{2\pi i \mathbf{j}\cdot\mathbf{w}}, \qquad \text{（秤動）} \qquad (10-91')$$

と書くことができる．同じように，（10－88）式をベクトル方程式として，

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\nu} t + \boldsymbol{\beta}, \qquad (10-88')$$

と書くならば，q_k の時間依存性は，つぎのような形に表わされる．

$$q_k(t) = \sum_{\mathbf{j}} a_{\mathbf{j}}^{(k)} e^{2\pi i \mathbf{j}\cdot(\boldsymbol{\nu} t + \boldsymbol{\beta})}. \qquad \text{（秤動）} \qquad (10-92)$$

一般には $q_k(t)$ は t の周期関数ではないことに注意せよ．いろいろな ν_i が共通の単位で測れる (commensurate)，すなわち互いに有理比をなしている，のでなければ，q_k は規則的な時間間隔毎に同じ値を繰り返し取らないであろう*．最後に，係数 $a_{\mathbf{j}}^{(k)}$ は，Fourier 係数に対する標準的な手法で求めることができることを思い出そう．すなわち，それらは $\mathbf{w}$ 空間における単位胞についてのつぎの多重積分によって与えられる．

$$a_{\mathbf{j}}^{(k)} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 q_k(\mathbf{w})\, e^{-2\pi i \mathbf{j}\cdot\mathbf{w}}(d\mathbf{w}). \qquad (10-93)$$

ここに $(d\mathbf{w})$ は w_i の n 次元空間における体積要素を表わす．

運動が回転の性質を持っているときには，個々の変数の対 (q_k, p_k) の完全な 1 サイクルを経過すれば，座標 q_k はその初めの値には戻らず，そのかわりに，その周期 q_{0k} だけ値がふえる．それゆえ，そのような回転の座標は，それ自身では多重周期的でさえない．しかしながら，われわれはそのサイクルの間に w_k が 1 だけ増加することを知っている．したがって，関数 $q_k - w_k q_{0k}$ は 1 サイク
p.647 ルの後初めの値に戻り，それは秤動的な座標と同じように，すべての w について周期 1 の多重周期関数である．それゆえ，この関数は (10－91) 式のような多重 Fourier 級数に展開することができる．すなわち，

$$q_k - w_k q_{0k} = \sum_{\mathbf{j}} a_{\mathbf{j}}^{(k)} e^{2\pi i \mathbf{j}\cdot\mathbf{w}}, \qquad (\text{回転}) \quad (10-94\text{a})$$

あるいは，

$$q_k = q_{0k}(\nu_k t + \beta_k) + \sum_{\mathbf{j}} a_{\mathbf{j}}^{(k)} e^{2\pi i \mathbf{j}\cdot(\nu t + \beta)}, \qquad (\text{回転}) \quad (10-94\text{b})$$

のように書くことができる．このように，回転の座標から多重周期関数を導くことは常に可能であって，それは秤動の座標と全く同様に取り扱うことができる．したがって，後の議論を簡単化するために，われわれは主として秤動型の運動に限って論ずることにしよう．

分離可能な運動量座標 p_k もまた，仮定された運動の性質によって，w の多

---

*) t の関数として，q_k は準周期的 (quasi-periodic) 関数と呼ばれる．

重周期関数であって，(10－91)式に類似した多重Fourier級数に展開することができる．そうすると，いくつかの変数の組 (q_k, p_k) の任意の関数も，w の多重周期関数であって，つぎの形に書くことができる．

$$f(q,p)=\sum_{\mathbf{j}} b_{\mathbf{j}} e^{2\pi i \mathbf{j}\cdot\mathbf{w}}=\sum_{\mathbf{j}} b_{\mathbf{j}} e^{2\pi i \mathbf{j}\cdot(\mathbf{v}t+\boldsymbol{\beta})}. \qquad (10-95)$$

例えば，系における粒子の直交座標がそれ自身は分離可能な座標でない場合でも，それらは(10－95)式のようなやり方で時間の関数として書くことができる．

(10－91)と(10－92)式は，問題の仮定された性質に合致する運動の，最も一般的な型を表わしているけれども，すべての系がこの完全な一般性を示すわけではない．特に，作用-角変数の応用の例として用いられるのに十分な程簡単な大部分の問題に対しては，各分離可能な座標 q_k は，それに対応する w_k のみの関数になるであろう．そのような場合には，q_k は w_k の(および，したがって時間の)周期関数であって，多重Fourier級数は1重Fourier級数になる．

$$q_k=\sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i j w_k}=\sum_j a_j^{(k)} e^{2\pi i j(\nu_k t+\beta_k)}. \qquad (10-96)$$

第6章の言葉でいえば，そのような問題では q_k は実質的に系の規準座標である．しかしながら，q についての運動がそのように簡単化できるときでさえも，すべての q，たとえば直交座標のようなものの関数は w の多重周期関数のままであって，(10－95)式のように表現されなければならないということもしばしば起こる．もし，いろいろな振動数 ν_k が有理比になっていないならば，そのような関数はもはや時間の周期関数ではない．２次元の非等方調和振動子は，このような考察の便利で親しみ深い例を与えている．ある特定の直交座標の組において，ハミルトニアンがつぎの式で与えられているとする．

$$H=\frac{1}{2m}[(p_x^2+4\pi^2m^2\nu_x^2x^2)+(p_y^2+4\pi^2m^2\nu_y^2y^2)].$$

p. 468
それゆえ，これらの直交座標は適切な分離座標であって，その各々は，それぞれ振動数 ν_x と ν_y を持つ単振動を示すであろう．このように，x および y に対する解は，(10－96)式の１重Fourier級数の特に簡単な形になる．さて，

この座標軸が z 軸のまわりに 45°回転されるとしよう．新しい x', y' 軸に沿う運動の成分は，

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}[x_0 \cos 2\pi(\nu_x t + \beta_x) + y_0 \cos 2\pi(\nu_y t + \beta_y)],$$
$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}}[y_0 \cos 2\pi(\nu_y t + \beta_y) - x_0 \cos 2\pi(\nu_x t + \beta_x)], \tag{10-97}$$

になるであろう．もし ν_x/ν_y が有理数であるならば，これら 2 つの表式は 1 重周期的であって，1 つの閉じた Lissajous の図形に対応する．しかし，もし ν_x と ν_y が有理数の比になっていないならば，その Lissajous の図形は決してそのステップを再び正確にたどることはなく，(10－97) 式は (10－95) 式の形の多重周期級数展開の簡単な例を与える．

q_k がすべての w の多重周期関数であるときでさえも，直観的には，q_k とそれに対応する w_k (したがってまた ν_k) との間には ある特別な関係がなければならないように感じられるであろう．結局，(10－90) 式に到達する議論は，つぎのことを述べているのである．すなわち，q_k のみがその完全な 1 サイクルを行うとき，w_k は 1 だけ増加するものとして選び出され，一方他の w はそれらの初期値に戻るのである．1961 年になって初めて J. Vinti がこの直観的な感じを正確で厳密な命題に表現することに成功した.* 時間間隔 T が q_k の m 回の完全なサイクルと，それに加えて 1 サイクルの一部を含むとしよう．一般には，q_k は t の周期関数ではないであろうから，おのおのの相続くサイクルに対して必要な時間は異なっているであろう．そのとき，Vinti は数論の定理に基づいて，T が無限に増加するときに，

$$\underset{T\to\infty}{L} \frac{m}{T} = \nu_k, \tag{10-98}$$

であることを示した．すなわち，q_k の運動の平均の振動数は，全体の運動が振動数 ν_k をもつ 1 重周期関数よりも複雑なときでも，常に ν_k によって与えられる．

すべての振動数の比が有理比をなす場合を除けば，多重周期関数は常に母関

*) J. Vinti, *J. Res. Nat. Bar. Standards*, **65B**, 131 (1961)．また R. Garfinkel の *Space Mathematics*, Part 1, p.57, 1966 を見よ．

数Wから作ることができる．J_iを定義する（10－84）式は，実質的には，q_iが1周期進むとき，すなわちw_iが1だけ変化するとき，特性関数がJ_iだけ増加するということを示している．したがって，関数，

$$W' = W - \sum_k w_k J_k \,, \qquad (10-99)$$

は，各々のw_kが，それ以外のすべての角変数を一定に保ったままで1だけ増加するときに，不変であるということが導かれる．それゆえ，（10－99）式は1つの多重周期関数を表わしており，それはw_i（あるいは振動数ν_i）を用い
p. 469
れば（10－95）式の形の級数に展開することができる．角変数に対する変換式は，

$$w_k = \frac{\partial W}{\partial J_k},$$

であるから，（10－99）式は，独立変数の組(q, J)から(q, w)へのLegendre変換を定義する式であることがわかるであろう．事実，（9－12）式と結びつけて（9－15）式と比較すれば，もし$W(q, J)$が$F_2(q, P)$の形の母関数であるならば，$W'(q, w)$は，$F_1(q, Q)$型の対応する母関数であり共に(q, p)変数から(w, J)変数への変換を行うことが示される．このように一方W'はWと同じ変換を引き起こすものではあるが，いうまでもなくこのW'はHamilton-Jacobiの方程式の解ではない*.

ずっと強調してきたように，系の配置は，振動数ν_iが互いに有理比をなしていない場合に限って多重周期的になる．もしそうでなければ，ある十分長い時間間隔をおいて，同じ配置が繰り返されることになり，したがって運動は1重周期的になる．すべての振動数ν_iが有理比をなすための形式的な条件は，j_iを整数としたとき，$(n-1)$個の，

---

*) ここでは，作用－角変数は，1重周期的な分離可能な座標を用いて定義された．そして，系の全体としての運動が，一般には多重周期的であることが示された．この手順を逆にすることができる，ということは注意すべき点である．すなわち，系の運動が多重周期的であるということを認めることから出発すれば，系の配置および母関数$W'(q, w)$が，すべてのwについて周期1で多重周期的であり，また，ハミルトニアンがすべてのwについてサイクリックになるような変数として，作用－角変数を導入することができる．このようにするならば，分離座標を引き合いに出す必要はなくなる．詳しいことは，Born, *The Mechanics of the Atom*, 第15節を参照．

$$\sum_{i=1}^{n} j_i \nu_i = 0, \qquad (10-100)$$

の形の独立な関係式が存在するということである．この連立方程式を解けば，任意の ν_i はどれか1つの振動数の有理分数倍として表わすことができる．基本振動数の間に，(10－100)式の形の独立な関係式が m 個しか存在しないときには，その系は**m重に縮退**(*degenerate*)**している**といわれる．もし m が $n-1$ に等しく，したがって運動が1重周期的であるならば，その系は**完全に縮退している**(*completely degenerate*)といわれる．このように，**系の代表点の軌道が閉じているときには，いつでもその運動は完全に縮退しているであろう．**

Hamilton-Jacobiの方程式が変数分離可能であるような座標と，系の縮退との間には興味ある関係が存在する．縮退していない系に対しては，その配置点および代表点の軌道はいずれも，それぞれ配置空間および位相空間において，ある限られた領域を完全に埋めつくしてしまう(すでに引用したBornの書物 *The mechanics of the Atom* の付録1を参照)．分離座標の任意の1つの運動が1重周期的であり，そしてそれゆえ他の座標の運動とは独立であることが示されているような問題を考えよう．したがって系の代表点の軌道は，全体として，分離された変数 q_i, p_i が，その振動の限界から決まる，ある一定の値に等しいような面を境界とする領域内に限られる(この議論は，すべての角に対する変域を0と 2π の間に限ることにすれば，回転の場合へも容易に拡張される)．それゆえ，これらの面は，位相空間の中である体積を囲むことになり，この体積は系の代表点の軌道によって密に埋められる．明らかに，縮退していない系に対しては，変数分離の仕方は1通りしかないことが結論される．すなわち，2つの異なった座標系においては，Hamilton-Jacobiの方程式を変数分離することはできない(ただし，尺度の変更のような自明な変換は除く)．このように，2つ以上の座標系で運動を分離することができるということは，一般にその系が縮退している証拠になるのである*.

p.470

*) ハミルトニアンが，いくつかの座標系で変数分離可能であって，しかも軌道がある部分領域の中に含まれているときに限り閉じている，すなわち縮退しているという，病理的な場合が存在する．不連続性が，軌道がある境界を横切るときに起こり得るのである．E. Onofri and M. Pauri, *Jour. Math. Phys.* **14**, 1106 (1973) を見よ．“局所的な(local)”縮退へのそのような制限は，微分可能でかつ連続な，通常のハミルトニアンでは起こらない．

縮退の最も簡単な例は，２つあるいはそれ以上の振動数が等しいときに起こるものである．３次元調和振動子において，３つの力の定数のうちの２つが等しいならば，それらに対応する振動数は等しくなり，系は１重に縮退している．等方的な調和振動子の場合には，定数はすべての方向に対して等しく，３つの振動数は等しくなって，系は完全に縮退する．

縮退のあるときにはいつでも，n 個の基本振動数はもはや全部が独立ではなく，系の周期運動は総数 n 個より少ない振動数を用いて記述することができる．実際，縮退に対する m 個の条件を用いれば，独立な振動数を（ $n-m$ ）個に減らすことができ，そのとき系の運動は（ $n-m$ ）重周期的であるといわれる．振動数の個数を減らすためには，作用-角変数に対する点変換を用いる方法が一番すっきりしている．まず，m 個の縮退の条件を，

$$\sum_{i=1}^{n} j_{ki}\nu_i = 0, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{10－101}$$

の形にまとめておこう．さてつぎの母関数で定義される (w, J) から (w', J') への点変換を考えよう（（９－26）式を参照．そこでは和の規約が用いられている）．

$$F_2 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} J'_k j_{ki} w_i + \sum_{k=m+1}^{n} J'_k w_k. \tag{10－102}$$

変換された座標は，つぎのようになる．

$$\begin{aligned} w'_k &= \sum_{i=1}^{n} j_{ki} w_i, & k &= 1, \ldots, m, \\ w'_k &= w_k, & k &= m+1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{10－103}$$

したがって，新しい振動数は，

$$\begin{aligned} \nu'_k = \dot{w}'_k &= \sum_{i=1}^{n} j_{ki}\nu_i = 0 & k &= 1, \ldots, m, \\ &= \nu_k & k &= m+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{10－104}$$

p. 471
となる．このようにして，変換された座標においては，初めの m 個の振動数は零となり，（ $n-m$ ）個の独立な振動数の組だけが残る．系の配置が，w'_k 座標について，基本周期１で多重周期的であるという意味で，明らかに w'_k もまた角

変数と名づけてよい．それらに対応する一定の作用変数は，n 個の変換式，

$$J_i = \sum_{k=1}^{m} J'_k j_{ki} + \sum_{k=m+1}^{n} J'_k \delta_{ki}, \qquad (10-105)$$

の解として与えられる．

さて，零の振動数は，Fourier 展開における定数因子に対応する．いうまでもなく，これらの定数因子は，v を用いて書いたもとの Fourier 級数（10－91）式の中にも，指標 j_i が縮退の条件を満足しているときには常に現われる．ところで，

$$\nu'_i = \frac{\partial H}{\partial J'_i},$$

であるから，ハミルトニアンは，零の振動数に対応する作用変数 J'_i を含んでいてはならない．それゆえ，完全に縮退した系においては，ハミルトニアンはただ1つの作用変数だけの関数にしてしまうことができる．

Hamilton の特性関数はまた，変数 (q, p) の組から (w', J') の組への変換の母関数としても役立つということに，注意すべきである．J' という量は，n 個の独立な定数であるから，初めの積分定数は J' の組で表わされ，W は $W(q, J')$ として与えられる．この形にすると，W は J' という量が正準運動量であるような，正準変数の新しい組への母関数である．しかし，（10－102）式の F_2 によって生成される点変換の性質によって，w' は J' に共役であることがわかる．したがって，$W(q, J')$ によって生成される新しい座標は w' の組でなければならないことが導かれる．その変換方程式は，

$$w'_i = \frac{\partial W}{\partial J'_i}, \qquad (10-106)$$

によって与えられる（（10－102）式の代表的な構造に基づく，（10－106）式のもっと形式的な証明については，演習問題17を見よ）．

逆2乗の法則に従うような中心力の場における，1個の粒子の有界な運動の問題は，縮退に関係した多くの現象を示している．この問題を論じることはまた，作用-角変数の方法がどのように個々の問題に適用されるかを示すとともに，Bohr の量子力学と天文力学との結びつきを明らかにするのによい機

会を与える．そこで，次の節では，作用-角変数を用いて，Kepler 問題を詳細に取り扱うことにしよう．

p.472

10－7　Kepler問題の作用-角変数による取り扱い*

Kepler 運動が平面運動であることは初めからわかっているけれども，問題の解のすべての性質をはっきりと示すために，この知識は使わないで，3次元空間における運動を調べることにしよう．球面極座標を用いれば，Kepler 問題は，空間における中心力運動に対して第10－4節で与えられた一般的な取り扱いの特別な場合になる．(10－54)式から(10－61)式までは，$V(r)$をそれが現われる所ではすべて，特殊な形，

$$V(r) = -\frac{k}{r}, \tag{10－107}$$

で置き換えることによって，ここでの取り扱いに移すことができる．このポテンシャルを持つ Hamilton-Jacobi の方程式は，球面極座標において完全に変数分離可能であることはすでに示されている．われわれは運動が有界な場合，すなわち $E<0$ の場合に限って論ずることにしよう．それゆえ，運動は座標のおのおのに対して周期的であろう．すなわち，r と θ に対しては秤動であり，ϕ については回転であろう．このように，作用-角変数を適用するための条件は満足されている．そこで，われわれは，定義の式(10－84)に基づいて作用変数を構成することに進むことができる．(10－56)式から，

$$J_\phi = \oint \frac{\partial W}{\partial \phi} d\phi = \oint \alpha_\phi \, d\phi, \tag{10－18a}$$

が導かれる．同じように，(10－58)式に基づいて，J_θは，

$$J_\theta = \oint \frac{\partial W}{\partial \theta} d\theta = \oint \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta, \tag{10－18b}$$

で与えられる．最後に J_r に対する積分は，(10－59)式から，

*) ここから先，和の規約を再び用いることにしよう．

$$J_r = \oint \frac{\partial W}{\partial r} dr = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}\, dr, \qquad (10-18c)$$

である．第1の積分は自明である．完全な回転の間に，ϕ は 2π ラジアンだけ変化し，したがって，

$$J_\phi = 2\pi\alpha_\phi = 2\pi p_\phi\,, \qquad (10-109)$$

となる．この結果は，前もってわかっていることである．なぜなら，ϕ は H においてサイクリック座標であり，(10－109)式は単に，サイクリック座標に対応する作用変数に対する(10－83)式の特別な場合だからである．(10－108b)式の積分はいろいろな方法で実行できる．ここでは，初等的な積分の規則だけを用いる1つの手順をスケッチしておこう．全角運動量ベクトルの極角を i で示すならば，

$$\cos i = \frac{\alpha_\phi}{\alpha_\theta}, \qquad (10-110)$$

p.473
であって，そのとき(10－108b)式はまたつぎのようにも書くことができる．

$$J_\theta = \alpha_\theta \oint \sqrt{1 - \cos^2 i \csc^2 \theta}\, d\theta.$$

積分の完全な循環路は，θ に対して1つの限界 $-\theta_0$ から $+\theta_0$ へ行きまた戻ってくるものである．ここに θ_0 は $\sin\theta_0 = \cos i$，すなわち $\theta_0 = (\pi/2) - i$ で与えられるものである．それゆえ，巡回積分は0から θ_0 にわたる積分の4倍として書くことができる．あるいは少し計算を進めれば，

$$J_\theta = 4\alpha_\theta \int_0^{\theta_0} \csc\theta \sqrt{\sin^2 i - \cos^2\theta}\, d\theta\,,$$

となる．

$$\cos\theta = \sin i \sin\psi\,,$$

を代入すれば，この積分は，

$$J_\theta = 4\alpha_\theta \sin^2 i \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\psi\, d\psi}{1 - \sin^2 i \sin^2\psi}\,,$$

に変換される．最後に，

$$u = \tan\psi,$$

を代入することによって，積分はつぎの形になる．

$$J_\theta = 4\alpha_\theta \sin^2 i \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)(1+u^2\cos^2 i)}$$

$$= 4\alpha_\theta \int_0^\infty du\left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{\cos^2 i}{1+u^2\cos^2 i}\right] \qquad (10-111)$$

この最後の形の積分は，よく知られた積分のみを含み，最終的な結果はつぎのようになる.*

$$J_\theta = 2\pi\alpha_\theta[1-\cos i] = 2\pi(\alpha_\theta - \alpha_\phi). \qquad (10-112)$$

J_rに対する最後の積分は，つぎのように書くことができる．

$$J_r = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{(J_\theta + J_\phi)^2}{4\pi^2 r^2}}\, dr. \qquad (10-113)$$

積分が実行された後，この方程式は，$E \equiv H$を３つの作用変数 J_ϕ, J_θ, J_r の関数として解くことができる．J_ϕと J_θ はEの中に，$J_\theta + J_\phi$という結合された形でのみ現われることができ，したがって対応する振動数 ν_ϕ と ν_θ は等しくなければならず，縮退を示すことに注意しよう．この結果は，中心力が逆２乗法則に従うということに関係してはいなかった．**すなわち中心力によって生じる任意の運動は，少なくとも１重に縮退している。**この縮退は，もちろん運動が一定の角運動量ベクトル**L**に垂直な平面の中に限定される，という事実の結果である．この平面内における運動は，ϕが 2π の完全な周期を通じて変化するときに，θは限界 $(\pi/2) \pm i$ の間の完全な周期を通じて変化する，という関係で，θと ϕが互いに結びつけられているということを意味する．それゆえ，θとϕについての振動数は必然的に等しくなければならない．

（10－113）式に含まれる積分は，初等的な方法で行うこともできるが，最

---

*) （10－111）式の最後の被積分関数の第２項の積分を計算するに当っては，$\cos i$が正であることが仮定されている．このことは，問題の中のz軸に対して特に好ましい方向というものはなく，任意に選んでよいから，常に可能である．もし$\cos i$が負であったならば，（10－112）式の中のα_ϕの符号は正になるであろう．それ以後の公式の変化については，演習問題23を見よ．

初Sommerfeldが採用した留数（residue）の方法を用いるのが，もっともすっきりとしていて，かつ速かである．このような技巧を使い馴れている読者のために，（10－113）式の積分を計算する手順のあらましを述べておくことにしよう．いうまでもなく，有界な運動が起こりうるのはEが負である場合に限られる（第3－3節参照）．そして，被積分関数は$p_r = m\dot{r}$に等しいから，運動の限界は根号の中の式を零とおいた式の2根r_1，r_2によって定められる．図3－6に示したように，r_1を内側の限界とすれば，rの完全な1周期というのは，rがr_1からr_2へ行き，再びr_1に戻ってくるまでの間である． 運動の外向きの半分，すなわち，rがr_1からr_2へ行く間はp_rは正であるから，積分のこの部分では正の平方根をとらなければならない．一方，r_2からr_1への帰り道ではp_rは負であるから，負の平方根をとらなければならない．このように，積分はr_1，r_2を分岐点とする2価関数の2つの分岐を含んでいる．したがって，rの複素平面は（図10－3に示されているように），r_1からr_2まで実軸に沿って切断を入れたRiemann面の1葉として表わすことができる．

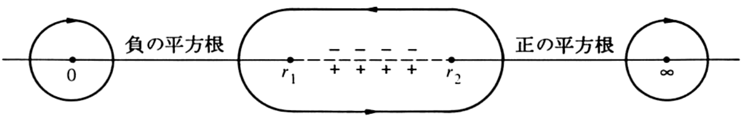


図10－3
実軸の近くの複素r平面．Jの計算にでてくる積分路を示す．

積分路は分岐点の間の線分を囲んでいるから，直接に留数の方法を用いることはできない．しかしながら，その積分路がその外側の複素平面の残りのすべての部分を囲んでいると考えてもよい．そのときには，積分路をまわる向きを反対（すなわち時計まわり）にしなければならない.* この積分領域では，被積

*) このように見方を変えることを見易くするためには，原点を南極，無限遠点を北極として，複素平面を球面上にステレオ投撮（stereographic projection）したと考えるのが便利である．そうすると実軸は，両極を結ぶ1つの子午線となる．球面上の任意の閉じた積分路は，球面を2つの部分にわける．そうすれば，積分路はその上をまわる向きに応じて，この2つの部分のうちのどちらを囲むと考えることもできる．

分関数は1価であるから，今度は留数の方法を適用しても差しつかえない．この場合には，原点および無限遠点のただ2つの特異点があるだけであるから，
p. 475
積分路を変形して，これら2つの点を時計まわりに囲む円にすることができる．ところで，r_1の近傍における被積分関数のふるまいを調べてみればわかるように，r_1より小さい実軸の部分に沿っては，被積分関数の根号の前の符号は負でなければならない．被積分関数を，

$$-\sqrt{A+\frac{2B}{r}-\frac{C}{r^2}},$$

と表わせば，原点における留数は，

$$R_0=-\sqrt{-C},$$

である．r_2より大きい実軸上では根号は正でなければならないことがわかる．無限遠点における留数は，標準的な方法に従って積分変数を $z=r^{-1}$ に変換することによって求められる．$z=r^{-1}$とおけば，積分は，

$$-\oint\frac{1}{z^2}\sqrt{A+2Bz-Cz^2}\,dz, \qquad (10-114)$$

となり，$z=0$ のまわりで展開すれば，留数として，

$$R_\infty=-\frac{B}{\sqrt{A}},$$

が得られる．全体の積分の値は，留数の和と $-2\pi i$ との積であって，

$$J_r=2\pi i\left(\sqrt{-C}+\frac{B}{\sqrt{A}}\right), \qquad (10-115)$$

である．係数 A, B, C を代入すれば，結局，

$$J_r=-(J_\theta+J_\phi)+\pi k\sqrt{\frac{2m}{-E}}, \qquad (10-116)$$

が得られる．

（10－116）式は，作用変数に対するHの関数関係を与える．Eについて解けば，

$$H\equiv E=-\frac{2\pi^2mk^2}{(J_r+J_\theta+J_\phi)^2}, \qquad (10-117)$$

となる．初めに予言した通り，J_θ と J_ϕ は $J_\theta+J_\phi$ という組み合わせの形でだけ現われていることに注意しよう．それどころか，3個の作用変数は，$J_r+J_\theta+J_\phi$ という形でだけ現われている．それゆえ，3個の振動数は全部等しく，**運動は完全に縮退している。** 実はこの結果も前もって予言することができたのである．なぜなら，われわれは力が逆2乗の法則に従うときには，軌道は負のエネルギーに対しては閉曲線になることを知っているからである．この運動は，閉じた軌道を持っているのであるから，1重周期的であり，それゆえ完全に縮退しているわけである．もし，中心力が，例えば相対論的な補正項のように，r^{-3} の項を含んでいれば，軌道はもはや閉曲線ではなく，歳差運動をする楕円 p.476 (precessing ellipse) の形になる．この場合には，縮退の1つは除かれるが，それでもなお，運動は1重に縮退している．それは，すべての中心力に対して $\nu_\theta=\nu_\phi$ になるからである．前の問題に戻って，この運動に対するただ1つの振動数は，

$$\nu=\frac{\partial H}{\partial J_r}=\frac{\partial H}{\partial J_\theta}=\frac{\partial H}{\partial J_\phi}=\frac{4\pi^2mk^2}{(J_r+J_\theta+J_\phi)^3}, \qquad (10-118)$$

で与えられる．(10−117)式によって，J の和をエネルギーの関数として計算すれば，その軌道の周期は，

$$\tau=\pi k\sqrt{\frac{m}{-2E^3}}, \qquad (10-119)$$

となる．この周期に対する公式は，軌道の半長軸 a が $-k/2E$ に等しいことを思い起こせば，Keplerの第3法則(3−71)式と一致している．

前節であらましを述べておいた手順に従えば，正準変換によって新しい作用-角変数にうつることによって，縮退している振動数を消去することができる．縮退の条件を，

$$\nu_\phi-\nu_\theta=0, \qquad \nu_\theta-\nu_r=0,$$

と書くと，この場合に適当な母関数は，

$$F=(w_\phi-w_\theta)J_1+(w_\theta-w_r)J_2+w_rJ_3, \qquad (10-120)$$

である．新しい角変数は，

$$w_1 = w_\phi - w_\theta,$$
$$w_2 = w_\theta - w_r, \qquad (10-121)$$
$$w_3 = w_r,$$

となって，初めに企てた通り，新しい振動数のうち，ν_1と ν_2 の２つは零になる．新しい作用変数は，変換式，

$$J_\phi = J_1,$$
$$J_\theta = J_2 - J_1,$$
$$J_r = J_3 - J_2,$$

から，次のように得られる．

$$J_1 = J_\phi,$$
$$J_2 = J_\phi + J_\theta,$$
$$J_3 = J_\phi + J_\theta + J_r. \qquad (10-122)$$

これらの新しい変数を用いれば，ハミルトニアンは，

$$H = -\frac{2\pi^2 mk^2}{J_3^2}, \qquad (10-123)$$

の形になる．これは，対応する振動数が零でないような，ただ１つの作用変数だけを含む形になっている．

p. 477
もし出発点から，束縛された Kepler 問題に対する運動が，１平面内における特別な閉じた軌道であるという事前の知識を用いようとするならば，J_θおよび J_r に対する積分は，非常に速かにかつ簡単に計算することができる．J_θに対する積分に対しては，J. H. Van Vleck によって示唆された手順を適用することができる．一般化座標を定義する式が時間を陽に含んでいないならば，

$$p_i\dot{q}_i = 2L_2 = 2T,$$

であることを思い出そう．運動が１平面内に拘束されていることが知られれば，運動エネルギー T は，球面極座標あるいは平面極座標(r, ψ)のいずれを用いても表わすことができる．そうすると，

$$2T = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} = p_r\dot{r} + p\dot{\psi}, \tag{10-124}$$

が導かれる．ここに $p(\equiv l)$ は全角運動量の大きさである．それゆえ，J_θ の定義は，

$$J_\theta \equiv \oint p_\theta\, d\theta = \oint p\, d\psi - \oint p_\phi\, d\phi,$$

と書くことができる．θ と ϕ に対する振動数は等しいから，θ が秤動の完全な1サイクルを動くとき，ϕ と ψ は両方共 2π だけ変化し，J_θ を定義する積分は，

$$J_\theta = 2\pi(p - p_\phi) = 2\pi(\alpha_\theta - \alpha_\phi),$$

となり，(10－112)式と一致している．

(10－113)式の J_r に対する積分は，$H \equiv E$ を3つの作用変数を用いて表わすために計算された．束縛されたKepler問題における閉じた楕円軌道は，r に対する振動数が，θ および ϕ に対する振動数と同じであるようなものであるという事実を用いるならば，H の J に対する関数関係は(10－124)式からも求めることができる．そのときには，実質的に，われわれは J_r を異なった方法で計算しているのである．Kepler問題における有界な軌道に対するビリアル定理は，

$$\bar{V} = -2\bar{T},$$

であることを述べている((3－30)式参照)．ここに文字の上の横線は，運動の1つの完全な周期にわたる平均を表わしている．これから，

$$H \equiv E = \bar{T} + \bar{V} = -\bar{T}, \tag{10-125}$$

が導かれる．(10－124)式を，運動の完全な1周期にわたって，時間に関して積分すると，

$$\frac{2\bar{T}}{\nu_3} = J_r + J_\theta + J_\phi = J_3, \tag{10-126}$$

が得られる．ここで，ν_3 は運動の振動数，すなわち周期の逆数である．(10－125)と(10－126)式を結びつけると，関係式，

$$-\frac{2}{J_3}=\frac{\nu_3}{H}=\frac{1}{H}\frac{dH}{dJ_3}, \qquad (10-127)$$

p. 478
が導かれる．ここで（10－87）式が用いられている．（10－127）式は，H の J_3 に関する関数的振舞いに対する微分方程式である．この方程式を積分すると，直ちに解，

$$H=\frac{D}{J_3^2}, \qquad (10-128)$$

が導かれる．ここに D は，J のどれをも含むことはできない定数であり，したがって m と k のみに依存しなければならない．それゆえ，われわれは D を，半径 r_0 の円軌道という初等的な場合を考えることによって計算することができる．円軌道に対しては $J_r=0$ でかつ $J_3=2\pi p$ である．この場合，全エネルギーは，

$$H=-\frac{k}{2r_0} \qquad (10-129)$$

である（これはビリアル定理から最も速かに知ることができる）．さらに，円軌道に対する条件，（3－41）式は，逆2乗の力に対しては，

$$\frac{k}{r_0^2}=\frac{p^2}{mr_0^3}=\frac{J_3^2}{4\pi^2 mr_0^3}, \qquad (10-130)$$

と書くことができる．（10－129）と（10－130）式から，r_0 を消去すると，

$$H=-\frac{2\pi^2 mk^2}{J_3^2},$$

が導かれる．この結果は円軌道に対してのみ導かれた．しかし，（10－128）式は，それがまた Kepler 問題の**すべての**有界な軌道に対しても正しくなければならないことを述べており，また事実それは（10－123）式と同じである．このように，すべての座標についてただ1つの周期が存在するということが前もってわかっていれば，経路積分を直接計算することなしに，$H(J)$ を得ることができる．

3つの自由度をもつ任意の問題においては，もちろん6個の運動の定数が存在しなければならない．Kepler 問題では，これらのうち5個は座標と運動量

の代数関数であって，空間における軌道の性質を記述し，最後の1つだけが与えられた時刻における，軌道上の粒子の位置に関するものである，ということはすでに指摘した（第3－9節を参照）．5個のパラメーターが，例えば3次元空間における有界なKepler問題の楕円軌道を完全に指定するために必要であることは容易にわかる．なぜなら，運動は1平面内で行われるから，その平面の3次元空間における方位を記述するために，2個の定数が必要である．楕円の**大きさ**（*scale*），例えば半長軸 a を与えるために，1つの定数が必要であり，もう1つの定数は，楕円の**形**（*shape*）を，例えば離心率 e を通して決めるために必要である．最後に，5番目のパラメーターは，軌道平面内のある任意の方向に相対的な，楕円の**方位**（*orientation*）を指定するものでなければならない．

軌道の古典的な天文学的**要素**は，ほぼ直接的に上に述べた形で軌道のパラメーターを与える．これらの要素の中に現われる角の2つは，あまりなじみ深くはないが，由緒ある名前をもっている．それらの定義と，軌道パラメーターとしての機能は，図10－4に与えられているような図から最も良く知ることができる．ここに，xyz は3次元空間に固定された，選ばれた軸の組を表わし，単位ベクトル $\mathbf{n}$ は軌道平面の法線を表わす．xy 平面と軌道平面の交線は**節線**（*line of nodes*）と呼ばれる．節線の上には，楕円軌道が xy 平面と交わる2

p. 479

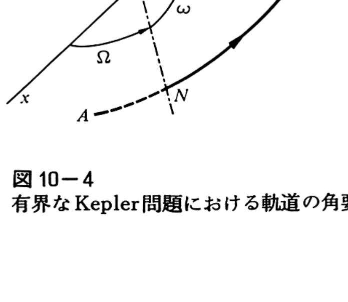


図 10－4
有界なKepler問題における軌道の角要素．

つの点がある．粒子が下の半球から上の半球へはいる点（すなわち，“南”半球から“北”半球へはいる点）は，**昇交点**（*ascending node*）として知られている．図 10－4 では，南半球にある軌道の部分は，はっきりさせるために破線で示してある．鎖線 ON は，昇交点を含む節線の部分である．xy 平面における ON の方向は，通常 Ω と記される角 xON によって測ることができる．この Ω は**昇交点黄経**（*longitude of the ascending node*）として知られている．最後に，C を軌道の最近点（periapsis）を表わすものとすれば，軌道平面内の角 NOC は ω で示され，**近日点の偏角**（*argument of the perihelion*）と呼ばれる*．上に，（10－110）式で導入したもっと親しみ深い角 i は，天文学では**軌道傾斜**（*inclination of the orbit*）として知られている．それゆえ，天文学的な要素の 1 つの通常の組は，6 個の要素，

$$i, \Omega, a, e, \omega, T,$$

から成り立っている．ここで，最後の 1 つ T は，最近点を通過する時刻である．残りの 5 個のうち，初めの 2 個は 3 次元空間における軌道面の方位を定める．一方 a, e および ω は直接，それぞれ楕円軌道の大きさ，形および方位を指定するものである．

Kepler 問題の作用-角変数による取り扱いはまた，5 個の代数的な運動の定数を与える．それらのうちの 3 個は，明らかに 3 つの定数である作用変数 J_1，J_2，J_3 である．残りの 2 個は，定数である角変数 w_1 と w_2 である．なぜなら，それ
p. 480 らに対応する振動数が零だからである．それゆえ，5 個の定数，J_1, J_2, J_3, w_1 および w_2 を古典的な軌道要素 i, Ω, a, e および ω で表わすこと，およびその逆も可能でなければならない．これらの相互関係のいくつかは直ちに明らかになる．（10－122）と（10－112）式から，

$$J_2 = 2\pi\alpha_\theta \equiv 2\pi l, \qquad (10-131)$$

が導かれ，それゆえ，（10－110）式によって，

*) この言い方は，太陽の周りを回るのではない軌道に対してさえ，普通に用いられているように思われる．

$$\frac{J_1}{J_2} = \cos i, \qquad (10-132)$$

である．良く知られているように，半長軸aは全エネルギーEのみの関数であり（(3－16)式を参照），したがって，(10－123)式によって，aは直接J_3を用いて与えられる．

$$a = -\frac{k}{2E} = \frac{J_3^2}{4\pi^2 mk}. \qquad (10-133)$$

離心率を表わす(3－62)式は，J_2を用いてつぎのように書くことができる．すなわち，

$$e = \sqrt{1 - \frac{J_2^2}{4\pi^2 mka}},$$

あるいは，

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{J_2}{J_3}\right)^2}, \qquad (10-134)$$

である．後は，角座標w_1とw_2を古典的な軌道要素に関係づけることだけが残っている．明らかにそれらはΩとωを含んでいなければならない．事実，適当に積分定数を選べば，それらはそれぞれΩとωに実際に比例するということが示される．このことはw_1に対しては以下で示すことにする．w_2に対して示すことは演習問題として残しておこう．

w_1を定義する変換式は，(10－106)式によって，

$$w_1 = \frac{\partial W}{\partial J_1},$$

で与えられる．(10－13′)式(647ページ)か，あるいはWの分離された形，(10－55)式から，Wは不定積分の和として書くことができることがわかる．

$$W = \int p_\phi \, d\phi + \int p_\theta \, d\theta + \int p_r \, dr. \qquad (10-135)$$

J_rに関する議論からわかるように，動径方向の運動量p_rはJ_1を含まず，(Eを通じて)J_3および1次結合$J_\theta + J_\phi = J_2$のみを含んでいる．したがって，最初の2つの積分のみがJ_1に関する導関数の中に含まれている．(10－109)

式から，

$$p_\phi = \alpha_\phi = \frac{J_1}{2\pi}, \qquad (10-136)$$

p.481
また（10－58）式から，（10－131）および（10－136）式を用いれば，

$$p_\theta = \pm\sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta}} = \pm\frac{1}{2\pi}\sqrt{J_2^2 - \frac{J_1^2}{\sin^2\theta}},$$

となる．w_1を昇交点と関係づけるためには，平方根の負の符号を選ばなければならないことがわかる*．それゆえ，角変数 w_1 はつぎの式によって決定される．

$$w_1 = \frac{\phi}{2\pi} + \frac{J_1}{2\pi}\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{J_2^2 - J_1^2\csc^2\theta}},$$

すなわち，

$$2\pi w_1 = \phi + \cos i\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{1-\cos^2 i\csc^2\theta}}$$

$$= \phi + \int\frac{\cot i\csc^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\cot^2 i\cot^2\theta}}.$$

積分変数を θ から，

$$\sin u = \cot i\cot\theta, \qquad (10-137)$$

で定義される u に変えることによって，積分は非常に簡単に行うことができて，w_1に対する表式は，

$$2\pi w_1 = \phi - u, \qquad (10-138)$$

となる．角座標ϕは，動径ベクトルの xy 平面上への射影を，x 軸から測った方位角である．明らかに，（10－137）式から，uは粒子の動径ベクトルを指定する極角 θ の関数である．しかし u の幾何学的意味は何であろうか？ u が何であるかは，Napierの規則†を，節線，動径ベクトルおよび動径ベクトルの xy 平面上の射

---

*）粒子が昇交点を通り過ぎるときには（図10－4参照），θは減少しつつあり，対応する運動量は負であることに注意せよ．J_θを計算する際には，符号の選択についてわずらわされることはない．なぜなら完全なサイクルを行うとき，両方の符号が現われるからである．

†）球面3角法に関する書物，あるいはつぎのようなハンドブックを見よ．*Handbook of Mathematical Tables*（Chemical Rubber Publishing Co.），あるいは *Handbook of Applied Mathematics*（Van Nostrand-Reinhold）．

影によって定義される球面 3 角形に適用することによって，知ることができる．しかしながら，いくらか三角法的な取り扱いに立ち入って，その関係を**最初から**（*ab initio*）導く方がより満足できるやり方であろう．図 10－5 において，直線 ON は節線，OR はある時刻における動径ベクトルを表わす線，また破線 OP は動径ベクトルの xy 平面上への射影であるとする．OP が x 軸となす角は方位角 ϕ である．u は OP が節線となす角であるということを示すことにしよう．このことを証明するために，xy 平面と節線の両方に垂直な平面を想像し，その平面が動径ベクトルと，原点 O から単位距離にある点で交わるとしよう．原点から出る 3 本の直線との交点 A, B, C と原点を合わせると，4 つの直角 3
p. 482
角形が定義される．OB は単位の長さであるから，$BC = \cos\theta$ であり，したがっ

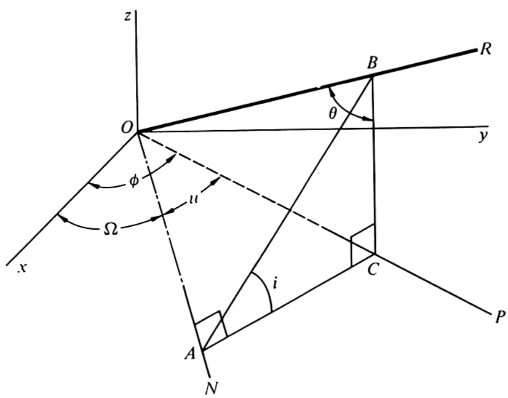


図 10－5
Kepler問題の作用－角変数による取り扱いの中にでてくる角を示す図.

てまた $AC = \cos\theta\cot i$ であることが導かれる．他方 $OC = \sin\theta$ であり，したがってまた $AC = \sin\theta\sin u$ が成り立つ．それゆえ，$\sin u = \cot i\ \cot\theta$ であって，これは（10－137）式と同じであり，要求されていた角 u についての命題は証明された．図 10－5 は明らかに，ϕ と u の差は Ω に等しくなければならないことを示し，したがって，

$$2\pi w_1 = \Omega. \qquad (10-139)$$

である．

同じようなやり方で，定数 w_2 の物理的性質を明らかにすることができる．W を構成する積分，(10－135) 式のうち，θ および r についての 2 個の積分は J_2 を含んでおり，したがって w_2 を見出す場合に用いられる．J_2 に関する微分を行った後に，θ についての積分は，w_1 に対して用いられたのと同じ型の 3 角関数の代入によって行うことができる．r についての対応する積分は，多くの方法で行うことができるが，最も直接的なのは，軌道平面における極座標の角で表わした r に対する軌道方程式を用いることである．積分の任意の下限を適当に選べば，$2\pi w_2$ は軌道面内の 2 つの角の差であることが見出される．その 2 つの角のうちの 1 つは，節線に対する動径ベクトルの角であり，もう 1 つは原点と最近点を結ぶ直線に対する動径ベクトルの角である．言い換えれば，$2\pi w_2$ は近日点の偏角である．すなわち，

$$2\pi w_2 = \omega, \qquad (10-140)$$

である．詳しい導き方は，演習問題の 1 つとして残しておく．

Keplerの問題を解くのに，作用-角変数を用いるのが最も手っとり早い方法であるという印象を受ける人は恐らくいないであろう．そして，一体この方法が実際的にどれくらい有用なものであるかという点について，疑問を持つのは
p.483
当然のことである．しかしながら，それらの価値は，長い間天体力学において示されてきている．この分野では，作用-角変数は Delaunay 変数* の形をして現われている．つぎの章で見るように，作用-角変数は摂動論において用いるのにふさわしい自然な軌道要素を与える．例えば，力が逆 2 乗法則からわずかにずれていることによって生じる，形式的な Kepler 軌道からの変形を求めるときに用いられる．衛生軌道に起こり得る摂動の基本的な研究の多くは，作用-角変数を用いて行われた．

短い期間の間，作用-角変数は，特に Kepler 問題に対して，物理学の研究の

---

*) 普通定義されているように，Delaunay 変数は (J_i, w_i) の組と定数倍だけ違っている．

最前線において顕著な役割を演じた．1913年にBohrの原子の量子論が出現したすぐ後で，量子条件は作用変数を用いれば最も簡単に述べることができるということがわかった．1915年頃から10年の間，作用-角変数の性質に強い関心が持たれ，“前期量子論”の大部分はそれらによって構築された．古典力学では，作用変数は連続な値をとりうるが，量子力学ではもはやそのことは成り立たない．SommerfeldとWilsonの量子条件はつぎのことを要求する．すなわち，系の運動の軌道は，“固有の”作用変数の値が，作用量子（quantum of action）hの整数倍に等しいとびとびの（discrete）な値をもつものに限られる（ここで，固有の作用変数というのは，それに対応する振動数が縮退しておらず，また零でもないようなJを意味する．例えば，J_3は1つの固有の作用変数である）．Sommerfeldが述べたように，作用-角変数の方法は，“量子化（quantization）への王道”であった．量子化を行うためには，古典力学の問題を作用-角変数の方法によって解きさえすればよい．そうすれば，後は単にJをPlanckの定数hの整数倍で置き換えるだけで，運動は量子化されるのである．

この手順の1例として，（10－123）式においてkをZe^2とおき，J_3をnhで置き換えれば，水素型原子（hydrogenic atom）の量子化されたエネルギー準位（energy level）が，直ちに得られることに注意しよう．

$$E = -\frac{2\pi^2 mZ^2e^4}{n^2h^2}. \qquad (10-141)$$

ここで，整数nは**主量子数**（*principal quantum number*）として知られているものであって，完全に縮退した系に対するただ1つの量子数である．もし相対論的な補正を入れるならば，縮退は部分的に除かれて，軌道面内で最近点の移動が起こる．そのときには，最近点の位置を測る角変数w_2は時間的に変化することになり，それに共役な作用変数J_2は“固有の”変数になる．したがってこの変数も，

$$J_2 = kh,$$

に従って量子化されなければならない．ここにkは**方位量子数**（*azimuthal quantum number*）と呼ばれる量子数である．この場合にはν_3もν_2も零で

ないから，エネルギーは J_3，J_2 の両方に，すなわち n と k とに関係するはずである．このようにして，良く知られた，水素原子のエネルギー準位の，相対論的な微細構造（ fine structure ）が得られる．さらに，任意にとられた極軸の p. 484 方向に沿って，一定の磁場を作用させると，縮退は完全に取り除くことができる．そのときには，軌道面は極軸のまわりに Larmor の歳差運動を行い，角変数 w_1 の時間的に一様な増加が引き起こされる．それゆえ，磁場があるときには，J_1 は固有の作用変数となり，他の２つの J と同じように，量子条件，

$$J_1 = mh,$$

に従わなければならない．ここに m は**磁気量子数**（ *magnetic quantum number* ）と呼ばれる量子数である．このときには，エネルギーは３個の量子数のすべてに関係する．このように，原子に磁場をかけて縮退を取り除くことによって，原子のエネルギー準位に Zeeman 分裂（ Zeeman splitting ）が生ずる.*

周期律表において，簡単な水素原子より先へ行くと，前期量子論を適用することは順次はるかに複雑になってくる．背景となる古典的な問題はもはや正確に解くことはできなくなり，多くの付加的な力を小さい摂動要素として取り扱わなければならなくなる．古典的な摂動論と，波動力学における摂動の方法との間には，多くの類似点はあるけれども，後で見るように古典的な方法は，量子力学におけるそれに対応する方法に比べて，ずっと複雑である．そしてこのことは，縮退がある場合に著しい．

しかしながら，間もなく，困難は単に数学的なものだけではないことがわかってきた．すなわち，Bohr の量子論は自然の正確な描像にはなっていないことがわかったのである．良く知られているように，波動力学と行列力学（ matrix mechanics ）がほとんど同時に導入されることによって，その行き詰まりは打開された．この２つの新しい理論では，量子論の問題を解く方法が，それまでのものとまったく異なっており，そのために作用-角変数の方法に寄せられていた関心は突然薄れてしまった．しかしながら近年になって，作用-角変数の使

---

*) このようにして得られるエネルギー準位の分裂は，単に正常 Zeeman 効果（ normal Zeeman effect ）だけを表わしている．もちろん，異常 Zeeman 効果（ abnormal Zeeman effect ）は，“スピン”の効果を含めることによって初めて正しく計算することができる．

用とその応用において，他の分野で，すなわち天体力学においてのみならず，電磁場の中における荷電粒子の運動を含む問題においても，いくらかの復活が見られている[1] 以下の第11－7節で論じられるはずである，作用変数のいわゆる断熱不変性(adiabatic invariance)から，プラズマ物理学および粒子加速器の設計において，作用-角変数の実り多い応用が導かれた．

まことに奇妙なことであるが，新しい波動力学の起源もまた，Hamilton-Jacobiの理論から生まれてきたのである．古典力学のPoissonの括弧式による定式化が，行列力学への出発点として役に立っていると言えるとすれば，波動力学の芽生えは，Hamilton-Jacobi の理論と幾何光学の関係の中に含まれていると言うことができる．次の節では，この関係を調べることに注意を向けることにしよう．

10－8 Hamilton-Jacobiの理論，幾何光学および波動力学

これから後，われわれはハミルトニアンが運動の定数であって，しかも全エ
p.485
ネルギーに等しいような系だけを考えることにしよう．その場合には，Hamiltonの主関数と特性関数は，つぎの式で結ばれている．

$$S(q, P, t) = W(q, P) - Et. \qquad (10-142)$$

特性関数は時間を含まないから，配置空間において W＝一定 の曲面は定まった位置を持っている． S＝一定 で特徴づけられる曲面は，ある与えられた時刻においては W＝一定 の面のうちの特定の1つと一致しなければならない．しかし， Sの一定の値に対応するWの値は，方程式(10－142)に従って時間的に変わって行く．そうすると， $t=0$ において $S=a$ および $S=b$ の面は，それぞれ $W=a$ および $W=b$ の面と一致している(図10－6参照)．dtだけ時間が経った後には， $S=a$ の面は $W=a+E\,dt$ の面に一致し，同じように $S=b$ の面は $W=b+E\,dt$ の面と一致する．すなわち，実質的には，時間 dt の間に面 $S=a$ は $W=a$ から $W=a+E\,dt$ まで動いたわけである．このような，曲

1) 朝永振一郎のマグネトロンの研究は作用-角変数の方法を用いて行われた後者の分野での顕著な業績の1つである．

面の時間的運動は，例えば衝撃波の波面のような，空間における波面（wave front）の伝播に似ている．このように，S＝一定 の面は，**配置空間の中を伝わる波面**と考えることができる．

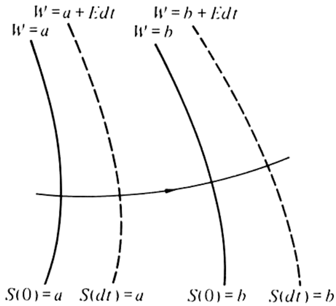


図 10－6
配置空間における S＝一定の面の運動．

S＝一定 の面は，一般に時間と共に形が変わるから，波の速度，すなわち波面の動いて行く速度は，面上の各点で一様ではないであろう．しかし，任意の与えられた点における波の速度を計算することはできる．便宜上，ただ 1 個の質点から成る系を考え，その位置を表わす直交座標を一般化座標にとることにしよう．そうすると，配置空間は通常の 3 次元空間になるので，幾何学的に問題を考えるのが大変簡単になる．S＝一定 の面の上にある特定の点における波の速度は，波面が無限小の dt 時間に法線方向に進む距離を時間間隔 dt で割ったものに等しい．面の法線方向の無限小距離を ds と書けば，波の速度は，

$$u=\frac{ds}{dt}, \qquad (10-143)$$

p. 486
である．ところで，時間 dt の間に面 S は，特性関数の値が W に等しい 1 つの面から，$W+dW$ に等しい面まで進む．ここで，

$$dW=E\,dt,$$

である．変化 dW はまた，法線方向の距離 ds と，

$$dW = |\nabla W|\, ds, \tag{10-144}$$

の公式によって関係づけられる．それゆえ，

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{|\nabla W|}, \tag{10-145}$$

である．Wのグラジェント（勾配）の大きさは，Hamilton-Jacobiの方程式によって与えられる．それは，1個の粒子に対する直交座標を用いれば，つぎの形を持っている．

$$(\nabla W)^2 = 2m(E - V). \tag{10-146}$$

それゆえ，波の速度は，

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}}, \tag{10-147}$$

である．（10－147）式は，いろいろ異なった形に表わすことができる．まず，EとVの差は運動エネルギーTであるから，

$$u = \frac{E}{\sqrt{2mT}}, \tag{10-148}$$

である．いま考えている1質点系に対しては，$2mT = m^2v^2 = p^2$であるから，（10－148）式はまた次の形に書くこともできる．

$$u = \frac{E}{p} = \frac{E}{mv}. \tag{10-149}$$

（10－149）式は， S＝一定 の面上の1つの点における波の速度が，Sによってその運動が記述されている質点の，その点における空間的速度に逆比例することを述べている．粒子の軌道が，常に S＝一定 の面に垂直でなければならないということを示すためには，もう1つ簡単な段階を通りさえすればよい．空間のある与えられた点における質点の軌道の方向は，運動量$\mathbf{p}$の方向によって決定される．ところが，（10－27）式によって，

$$\mathbf{p} = \nabla W, \tag{10-150}$$

p. 487
である．そして，Wのグラジェント（勾配）は S＝一定 ，あるいは W＝一

定 の面の法線方向を決定する．このように，W＝一定 の曲面族は，可能な運動の軌道の組をつくり出し，それらの軌道は常にその曲面族に垂直に交わっている．それらの軌道の１つに沿って質点が運動するにつれて，その運動を生成する面 S もこの空間の中を動いて行くが，これら２つの運動の歩調は合っていない．実際，質点の速度がおそくなるときには，面は速く動き，逆に質点が速く動くときには面はおそく動くのである．

以上の考察では，議論をやさしくするために，１個の質点から成る系を取り扱った．しかし，得られた結果の大部分は，もし運動エネルギーが（８－83）式のように，一般化速度の２次関数であるならば，多粒子系に対しても成り立つ．そのときには，第８章の終りで見たように，系の点がその中で速度 $\sqrt{2T}$ で動くような，曲がった配置空間を構成することができる（545ページ参照）．これは単位質量の１個の粒子の速度と同じであることに注意せよ．このように，特別な曲がった配置空間における S 曲面の波動速度が次のようになることが見出されるが，このことは驚くべきことではない[*]．

$$u=\frac{E}{\sqrt{2(E-V)}}=\frac{E}{\sqrt{2T}}. \qquad (10-147')$$

さらに，波動速度 u と，系の点の速度 $\sqrt{2T}$ との間の逆数関係はこの場合にも保たれている．同じように，系の配置点の可能な軌道は，ふたたび S＝一定 の面に垂直であることが見出される．このように，多粒子系へ移っても，物理的に新らしい結果は何も現われないので，数学的な取り扱いを簡単にするために，１質点の系の場合に限って議論を続けよう．

S＝一定 の面は，一定の位相をもつ波の面と同じような具合に空間内を伝わって行くので，波面として特徴づけられた．さらに，その波の速度さえも計算した．しかしながら，S＝一定 の面が波面になっているようなこの波の本性，あるいは起源については，まだ何も言っていない．あらゆる波動の最も著しい特性は，その周期性から生じてくるのであるが，今までのところ，S に結

*）配置空間における　S＝一定　の面の運動についての議論は，L. Brillouin, *Tensors in Mechanics and Elasticity*, trans. R. O. Brennan (New York: Academic, 1964)，第Ⅶ章を見よ．

びつけられた波については，その振動数や波長のスペクトルを示すものは何も現われていない．このような疑問を解明するために，良く知られた波動—光波—のもついくつかの特性を調べてみよう．

光学におけるスカラー波動方程式は，

$$\nabla^2\phi - \frac{n^2}{c^2}\frac{d^2\phi}{dt^2} = 0, \qquad (10-151)$$

である．ここでϕは，例えば電磁場のスカラー・ポテンシャルのような，スカラー量であり，cは真空中の光速度，nは屈折率，すなわちcと媒質中の光速
p.488 度との比である．一般にnは媒質によって異なり，また空間内の位置の関数でもあることが推測される．もしnが定数であれば，(10－151)式は，

$$\phi = \phi_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \qquad (10-152)$$

の形の平面波の解によって満足される．ここに波数(wave number)kと振動数ωは，

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c}, \qquad (10-153)$$

の関係で結ばれている．簡単のために，$\mathbf{k}$の方向がz軸に沿っているとすると，この平面波の解は次の形に書くことができる．

$$\phi = \phi_0 e^{ik_0(nz - ct)}. \qquad (10-154)$$

ここでk_0は真空中における波数である．しかしながら，われわれにとって興味があるのは，nが正確に定数ではなくて，空間内でゆるやかに変化する，位置の関数である場合の**幾何光学**(*geometrical optics*)である．この場合には，平面波はもはや波動方程式(10－151)の解ではなくなる．すなわち，位置とともに屈折率が変化するので，波は曲げられたり，ゆがめられたりするであろう．しかし，nの空間的変化はゆるやかであると仮定しているから，われわれはできるだけ平面波に近い解，すなわち，

$$\phi = e^{A(\mathbf{r}) + ik_0(L(\mathbf{r}) - ct)}, \qquad (10-155)$$

の形の解を探してみよう．2つの量A，Lは，これから定めようとする位置の

関数であって，両方共，実関数であると考える．したがって，Aは波動の振幅の目安になる量である．Lは，もしnが一定であればnzになるはずの量であるから，光学距離（*optical path length*），あるいに波の位相と呼ばれる．このLはまた，しばしばアイコナール（*eikonal*）とも呼ばれる．解ϕにグラジェント演算子を次々に作用させると，次の関係式が得られる．

$$\nabla\phi = \phi\nabla(A + ik_0L),$$

$$\nabla^2\phi = \phi[\nabla^2(A + ik_0L) + (\nabla(A + ik_0L))^2].$$

後の式はまた，

$$\nabla^2\phi = \phi[\nabla^2 A + ik_0\nabla^2 L + (\nabla A)^2 - k_0^2(\nabla L)^2 + 2ik_0\nabla A\cdot\nabla L],$$

と書くこともできる．この式を用いると，波動方程式は次のようになる．

$$ik_0[2\nabla A\cdot\nabla L + \nabla^2 L]\phi + [\nabla^2 A + (\nabla A)^2 - k_0^2(\nabla L)^2 + n^2k_0^2]\phi = 0. \tag{10-156}$$

AもLも実関数であるから，この方程式が成立するのは，２つの［　］の中の式が別々に零になる場合に限る．すなわち，

$$\nabla^2 A + (\nabla A)^2 + k_0^2(n^2 - (\nabla L)^2) = 0, \tag{10-157a}$$

$$\nabla^2 L + 2\nabla A\cdot\nabla L = 0, \tag{10-157b}$$

でなければならない．ここまでの所では，なにも近似はなされていないから，これら２つの式は厳密な式である．さてここで，nは距離に対してゆるやかに変化するという仮定を導入しよう．特にnは波長の程度の距離の範囲で大きく変わることはないと仮定する．このことは，実質的には，媒質になんらかの変化が起こっているような範囲にくらべて，波長が短かいことを意味しているが，これはまさに幾何光学に対する仮定にほかならない．それゆえ，（10－157a）式
p.489
の中では，$k_0^2 = 4\pi^2/\lambda_0^2$の掛かっている項が主要な項であって，最初の２項は，これに比べて省略することができ，方程式は次のような簡単な形になる．

$$(\nabla L)^2 = n^2. \tag{10-158}$$

(10－158)式は，**幾何光学におけるアイコナール方程式**として知られている*．この方程式によって決定される L を用いて作られる $L=$一定 の面は，光学的な位相が一定であるような面であり，したがって波面にほかならない．光線の進む道は，到る所で波面に垂直であり，それゆえ光線もまた，方程式(10－158)によって決定される．

これ以上幾何光学に立ち入って道草を食う必要はない．というのは，アイコナール方程式(10－158)は，力学における W に対する Hamilton-Jacobi の方程式(10－146)と同じ形をしていることがわかるからである．特性関数 W はアイコナール L と同じ役割を果たしており，屈折率のかわりに，$[2m(E-V)]^{\frac{1}{2}}$ がはいっている．このように，Hamilton-Jacobi の方程式は，**古典力学が，ある波の運動の幾何光学的な極限の場合に対応している**，ことを示している．そのとき，波面に直交している光線は，$S=$一定 の面に直交する質点の軌道に対応する．ここまでくれば，Huygens の光の波動論と，Newton の光の粒子説がいずれも，反射および屈折の現象をうまく説明することのできた理由は明らかである．なぜなら，いずれの理論も，幾何光学の極限では形式的に同じになるからである．さらに，最小作用の原理と，幾何光学における Fermat の原理との類似性もまた説明することができる．(8－89)式の，最小作用の原理の Jacobi の形では，被積分関数 $\sqrt{H-V}$ は，幾何光学においては，屈折率，あるいは波動速度の逆数に比例するある量で置き換えられるべきであることがわかる．したがって，最小作用の原理は，次の形に書いてもよいであろう．

$$\Delta\int n\,ds=\Delta\int\frac{ds}{u}=0. \qquad (10-159)$$

この式は，光線の進む道に対する Fermat の原理の，良く知られた2つのちがった表現である．

われわれはまだ，古典的な運動に結びつけられる波の振動数と波長を確定していない．はっきりしていることは，その波の波長が，粒子に働らく力および

*) ここでは，アイコナール方程式はスカラー波動方程式から導かれたけれども，それはまた，電磁場の強さを表わすベクトル場に対する波動方程式からも得ることができる． それについては，Born and Wolf, *Principles of Optics* を見よ．

ポテンシャルの空間的な広がりに比べて，はるかに小さくなければならないということだけである．古典力学の枠の中に留っている限り，これから先へ進むことはできない．古典力学は，幾何光学の１種として，まさに，波長が関係するような現象（干渉，回折など）が起こり得ないような分野なのである．（上に説明したように）ある意味では，古典力学においてさえも，粒子と波動の２重性は存在しているけれども，しかし粒子の方が主役であって，波動という側面は，その固有の特徴を現わす機会をもたないのである．

それにもかかわらず，Hamilton-Jacobi の方程式が，ちょうど短波長の極限を表わしているような，波動方程式の形について，想像をたくましくすることはできる．アイコナール方程式（10－158）と，Hamilton-Jacobiの方程式（10－146）が似ているということは，L とWとが等価であることを意味する
p.490
わけではない．単に，これら２つの量が互に比例してさえいればよい．その比例定数が，波長の大きさの目安になる量であることは，次のように考えればわかるであろう．もしWが Lに対応しているならば，$S = W - Et$ は,（10－155）式で定義される光波の全位相，

$$k_0(L - ct) = 2\pi\left(\frac{L}{\lambda_0} - \nu t\right), \qquad (10-160)$$

に比例しなければならない．それゆえ，粒子のエネルギー Eと波の振動数 ν とが比例しなければならない．そこでこの２つの量の一定の比を h と記することにする．すなわち，

$$E = h\nu, \qquad (10-161)$$

とおく．波長と振動数は，一般に，

$$\lambda\nu = u,$$

の関係式で結ばれているから，（10－149）式によって λ は，

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{E/p}{E/h},$$

すなわち，

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad (10-162)$$

で与えられることになる.

(10－160) 式の右辺に与えられている，波の位相に対する表式はまた，

$$\frac{2\pi}{h}\left(\frac{Lh}{\lambda_0} - h\nu t\right),$$

と書くこともできる．明らかに，括弧内の式は $W - Et = S$ の形をしている．このことは，粒子の力学的な運動に結びつけられるべき波の振幅が，

$$\psi = \psi_0 e^{iS/\hbar}, \qquad (10-163)$$

の形をもつべきであることを示唆する．ここに，通常のように $\hbar \equiv h/2\pi$ である．もしわれわれの描像が正しいものであるならば，この波の振幅を支配する方程式は，短い波長の極限，あるいは同じことであるが，h が非常に小さくなった極限では，Hamilton-Jacobi の方程式に帰着されなければならない．あと智恵によって，われわれはもちろん ψ によって満足される方程式は，Schrödinger の（時間に依存する）波動方程式，

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - V\psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad (10-164)$$

であることを知っている．Hamilton-Jacobiの方程式は，Schrödinger方程式の短波長の極限になっているであろうか？

この問題について調べるために，(10－163) 式をSchrödinger 方程式に代入してみよう．そうするとまず，

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\psi\frac{\partial S}{\partial t}; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar}\psi\frac{\partial S}{\partial x},$$

が得られる．それゆえ，直交座標における ψ のラプラシアンは，

$$\nabla^2\psi = \frac{i}{\hbar}\psi\nabla^2 S - \frac{\psi}{\hbar^2}(\nabla S)^2,$$

p.491

に等価である．したがって，S を用いれば，Schrödinger 方程式は次のように書くことができる．

$$\left[\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 S. \qquad (10-165)$$

角括弧の中の量は，直交座標で記述された1個の粒子に対するHamilton-Jacobiの方程式におけるハミルトニアンであることがわかる. 事実,（10－165）式は，もし右辺が零であったならば, Hamiltonの主関数に対する古典的なHamilton-Jacobiの方程式である.（10－165）式は，量子力学的なHamilton-Jacobiの方程式と呼んでもよいであろう．それは $\hbar$（したがって $\lambda\!\!\!^{-}$）が零に近づくときには極限において古典的方程式になる*. $\nabla^2 S$ の項を無視するための条件は，いろいろな形で述べることができる．1つは，$\nabla^2 S$ が $\nabla^2\phi$ の計算において $(\nabla S)^2$ と一緒に生じてくるということに注意することである．それゆえ，もし，

$$\hbar\nabla^2 S \ll (\nabla S)^2,$$

であるならば，あるいは同じことであるが，もし，

$$\hbar\nabla\cdot\mathbf{p} \ll p^2,$$

であるならば，$\nabla^2 S$ の項を落とすことができる．このことは，1次元では，

$$\frac{\lambda\!\!\!^{-}}{p}\frac{dp}{dx} \ll 1, \qquad (10-166)$$

を要求するのと同等である．ここに，$\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi$ であって換算波長（reduced wavelength）である．（10－166）式を言葉でいい表わせば，古典力学は，幾何光学の極限として，波長が非常に短かくて，運動量が，$\lambda\!\!\!^{-}$ の距離にわたって，省略し得るほど僅かの割合しか変わらないときに有効である，ということになる．言い換えれば，このことは，ポテンシャルが1波長の長さの範囲にわたって大きくは変化しないことを意味する†.

---

*)（10－165）式の中の S を $\hbar$ についてのべき級数に展開して，$\hbar$ の同じべきの係数を集めるならば，最も低次の近似は明らかに，古典的な Hamilton-Jacobiの方程式である．$\hbar$ に関して1次の，次の近似はWKBの近似，あるいは半古典的な近似になる.

†) それに付け加えて，なぜ Schrödinger 方程式と Hamilton-Jacobi の方程式が，分離可能性に対して同じ条件をもつのかということを知ることができる．しかしながら，分離された解は，異なる形を持っている.（10－163）式から，$W = S + Et$ が，各々がただ1つの座標のみを含む関数の和の形に分離されるときに，ψ はそのような関数の積に分離されることがわかる.

Hamilton-Jacobiの方程式の，量子論的な解釈と古典的な解釈との間の差は，hの大きさに依存する．hが小さくなればなるほど，波長は短かくなり，幾何光学への近似はだんだん良くなる．ところで，Hamilton-Jacobiの方程式とアイコナール方程式とが等価であるということは，1834年に最初にHamiltonによって認識された．一方，それに対応する波動方程式は，de BroglieとSchrödingerによって1926年に初めて導き出された．Hamiltonがもう少し先へ進んでいたならば，彼がSchrödinger方程式を発見したであろうといわれているが，しかしそうではない．彼にとっては，この飛躍をするに足るだけの実 p.492 験的な根拠がなかったのである．Hamiltonの時代には，古典力学は厳密に正しいものだと考えられており，それが，もっと適用範囲の広い理論の1つの近似に過ぎない，と考えなければならないような実験的な証拠は何もなかったのである．言い換えれば，Hamiltonにとっては，hの値が少しでも零と違っていてよいと信ずべき何の理由もなかったのである．粒子の波長に関係する効果──たとえばDavissonとGermerの干渉の実験におけるような──が発見されたときになって初めて，古典力学が，ある波動論に対する幾何光学的な近似にすぎない，ということが認識されるようになった．そして，そのときになって初めて，hに物理的な現実性が与えられるようになったのである.* ここで，hは，いうまでもなく，有名なPlanckの定数である．

そうは言うものの，古典力学は，すでにその中に量子論の種を含んでおり，Hamilton-Jacobiの定式化は，古典力学を波動力学へと一般化すべき方法を示すのに特に適したものであった，ということを今になって知ることができる．このような問題にこれ以上立ち入ることはこの書物の範囲を越えることになり，“波動力学の幾何光学”！とでも名づけるべきものになるであろう．

---

*）光の波動論の発展においても，同じような事情があった．光の干渉や回折の現象が実験的に観測されるまでは，Newtonの粒子説よりもHuygensの波動説の方を選ぶ理由は何もなかったのである．

参　考　書

R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics.*　Hamilton-Jacobiの方程式は，多変数の1階偏微分方程式の1例であって，この型の方程式の数学的な特性は，（すでに注意したように）Hamilton-Jacobiの理論の展開のために重要である．CourantとHilbertの第2巻は，それに関連のある数学への（殆ど）骨の折れない手引きを与える．第1は，第1章の入門的な節（第4節）の中にあり，また第2は，第2章におけるHamilton-Jacobiの理論の長い，明確な議論の中にある．

C. Carathéodory *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order.*　長い年月にわたって，1階偏微分方程式に関する価値を認められた権威書．Carathéodoryの第1巻の中の論述は，CourantとHilbertよりもはるかに深く立ち入っており，特に"特性曲線"（characteristics）と呼ばれている理論を詳細に展開している．Hamilton-Jacobiの方程式は，とくにその名前を出しては引き合いに出されていないが，その方程式とそれの力学との関係は，この書物の大部分を占めている．

C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics.*　Hamilton-Jacobiの理論（第8章における）のこの書物における取り扱いでは，理論の基礎づけとその幾何学的な解釈が強調されている．作用−角変数（"Delaunayの取り扱い"として引用されている）に対する必要条件とその性質について，かなりの議論がなされている．詳細な応用は僅かしかない．

D. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics.*　Hamilton-Jacobiの方程式，およびKepler問題の作用−角変数を用いた取り扱いを含む応用は，この章で与えられたものと，大雑把にいって平行している．しかし，力点のおき方や見方には必然的に差異があるので，2つの議論を比較すれば有益であろう．

M. Born, *The Mechanics of the Atom.*　物理学者は，前期量子論の全盛期に，作
p.493
用−角変数に短期間の間関心を持った．そのときには，作用−角変数は量子化への"王道"を与えるものであった．Bornの書物はその時期に書かれたものであって，今でも物理学者にとって取っ付き易い，Hamilton-Jacobiの理論と作用−角変数についての最もよい解説の1つである．その中に載っている応用は著しく多い．作用−角変数およびそれに関連した摂動論についてのBornの解説は，多くの力学の教科書に見出されるように，これらの分野についての解説の源であって，本書もその完全な例外というわけでは決してない．しかしながら，原子構造についてのBornの書物の中の記述

は，注意して受けとるべきである．それらの大部分は，時代おくれになっている．

A. SOMMERFELD. *Atomic Structure and Spectral Lines.*　Hamilton-Jacobiの理論および作用-角変数についての記述は，この書物の本文や付録の中に散在しているが，それらはBornの書物ほど詳しくはない．多分そのためであろうが，この書物の方が読み易い．特に注意すべきことは，変数分離のできる座標系の数と，運動の縮退の間の関係についての議論が載っていることである．留数の理論を用いて，Keplerの問題にでてくる積分を，計算する方法は，付録の中で説明されている（これはBornの書物の中にも述べられている）．

J. H. VAN VLECK. *Quantum Principles and Line Spectra.* "数学的方法"と題する章では，Hamilton-Jacobiの理論および作用-角変数の手っ取り早い展望とともに，摂動論への手引きが与えられている．この書物の残りの大部分は，歴史的な興味しかない．この書物に対しても，Bornの書物に対して述べたのと同じ注意が必要である．この注意はSommerfeldの書物に対しても殆ど同様にあてはまる．

B. GARFINKEL. *The Lagrange-Hamilton-Jacobi Mechanics in Space Mathematics, Part I.*　作用-角変数は（名前は違っていたけれども），それらに物理学的な関心が持たれるよりもはるか以前から，天体力学において用いられてきた．そしてそれらは，今日でも摂動論に取りくむための，エレガントな方法として用いられている．この参考文献は，短かく要約されてはいるが大変読み易いエッセイの形で，作用-角変数の問題が天体力学の立場からどのように見られているかということを示している（これは周知のように，解析力学の多くの教科書に欠けているテーマであって，この書物の1つの特徴となっている）．36ページ足らずの中に，この書物では，Lagrangeの力学から摂動論までが含まれているが，しかし短かいスペースの中に信じられない程多くの量の題材が詰めこまれている．そのいくつかの例を挙げれば，分離可能性に対するStaeckelの条件（(82)式には明らかな因子2がぬけている），Vintiの定理，およびDelaunay要素などがある．記号と規約の中には，物理学で通常用いられるものとは異なっているものがある．

L. A. PARS. *A Treatise on Analytical Dynamics.*　3つの章にわたって，Hamilton-Jacobiの方程式から作用-角変数までを取り扱っている．そのため，ゆっくりした取り扱いがなされ豊富な例題が含まれている．独特なのは，Hamilton-Jacobiの方程式への応用とは無関係な，分離可能な系の性質それ自身についての議論である．Staeckelの条件は，詳しく取り扱われている．作用-角変数は，陽には名前を挙げられていない（角変数には言及されている）が，多重周期運動についての節は広範囲にわたっている．

H. V. McIntosh, *Symmetry and Degeneracy : Group Theory and its Applications*, Vol. 2, ed. E. M. Loebl. 予期されるように，分離可能性と縮退（および系の対称性）の間の関係が，この書物ではかなり論じられている．縮退していない系の軌道が，空間を満たすという性質が，分離可能性に対して不利に作用するという議論が，いくらか詳しく行われており，非常に多様な系に対して導かれる結果が考察されている（磁気単極子のような普通でないものも含めて）．全体的に見て，恐らくこの文献は，1970年代に知られている縮退，分離可能性および対称性の間の関連についての，最も利用し易い参考文献であろう．

p.494

L. Brillouin, *Tensors in Mechanics and Elasticity.* この魅力的に書かれた書物は，非常に変化に富んだトピックスについての多くの情報を含んでいる．それは，微分幾何学から（1938年頃の）固体の量子力学にまでわたっている．配置空間における $S=$一定 の面の運動は第Ⅷ章で詳細に述べられており，また，古典力学，幾何光学および波動力学を結びつける関係は，第Ⅸ章で徹底的に論じられている．

M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics.* Hamilton-Jacobiの理論の幾何光学への応用に関する標準的な参考文献の１つは，すばらしい，J. L. Syngeによる *Geometrical Optics* という書物である．BornとWolfはもっと理解し易い手引きを与えており，さらにSchrödingerの波動方程式への拡張にもかなりの注意をはらっている．幾何光学の基礎づけに関する１つの章は，他の題材の中でも，とりわけベクトル場に対するアイコナール方程式の導出を取り扱っている．光学的な結像の幾何学な理論に関する，それに続く章は，少なくとも，ハミルトニアンによる方法から出発している．これに関連して，２つの付録は特に興味を引く．その第１のものは，Hamilton-Jacobiの方程式に力点をおいた，実際的には変分法に関する短かい論文である．第２の付録の内容は，その題名，“光の光学，電子光学，および波動力学”によって明確に示されている．

演 習 問 題

1. 保存系に対して，ある適当な偏微分方程式を解くことによって，新しいハミルトニアンが新しい座標のみの関数になるような，１つの正準変換を構成できることを示せ（交換変換を用いてはいけない）．どのようにして，系の運動に対する形式的な解が，新しい座標と運動量を用いて与えられるかを示せ．

2. 本文の中では，正準変数の組(q,p)から定数の組(α,β)への接触変換を求めることによっ

て，S に対する Hamilton-Jacobi の方程式が得られた．逆に，もし $S(q_i, \alpha_i, t)$ が Hamilton-Jacobi の方程式（10－3）の１つの完全解であるとすれば，（10－7）と（10－8）式で定義される変数の組 (q_i, p_i) は正準変数であること，すなわち，それらが Hamilton の運動方程式を満足することを示せ．

3. Hamilton-Jacobi の方法を用いて，鉛直面内で投げ出された質点の運動の問題を解け．その質点が，$t=0$ において，原点から水平方向と角 α をなす方向に，速度 v_0 で発射されたと仮定して，軌道の方程式と，座標の時間依存性の両方を見出せ．

4. Hamilton-Jacobi の方法を用いて，１点を固定された重い対称こまの運動方程式を立て，（5－63）式で与えられているような形式的な解を求めよ．

5. 関数，

$$S = \frac{m\omega}{2}(q^2 + \alpha^2)\cot\omega t - m\omega q\alpha \csc\omega t,$$

が

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2),$$

をもつ線形調和振動子に対する，Hamilton の主関数に対する Hamilton-Jacobi の方程
p.495
式の１つの解であることを示せ．この関数は，調和振動子の時間的な運動に対する正しい解を与えることを示せ．

6. １個の荷電粒子が，１平面内で運動するように拘束され，中心力ポテンシャル（電磁的なものでない）$V = \frac{1}{2}kr^2$ と，その面に垂直な次式で与えられる一定の磁場 $\mathbf{B}$ の影響の下にある：

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r}.$$

平面極座標において，Hamilton の特性関数に対する Hamilton-Jacobi の方程式を作れ．方程式を分離し，それを求積法の形にせよ．$t=0$ において正準運動量 p_θ が零であるとき，その運動を論ぜよ．

7. a）１個の質点が，保存力のポテンシャルの下で空間内を運動している．楕円体座標 u, v, ϕ を用いて Hamilton-Jacobi の方程式を作れ．この座標は，通常の円筒座標 r, z, ϕ を用いて次の式で定義されている．

$$r = a\sinh v \sin u, \qquad z = a\cosh v \cos u.$$

$V(u, v, \phi)$ がどのような形の場合に，方程式は分離できるか？

b)（a）の結果を用いて，z 軸上に距離 $2a$ だけへだてて固定された，質量の異なる２個の質点のつくる重力場の中で運動する，質量 m の質点の問題を求積法に帰着させよ．

8. 1自由度の問題におけるポテンシャルが，時間の1次関数であって，そのハミルトニアンが，

$$H = \frac{p^2}{2m} - mAtx,$$

の形であるとする．ここでAは定数である．初期条件，$t=0$, $x=0$, $p=mv_0$の下で，Hamiltonの主関数を用いて，この力学の問題を解け．

9. 一般化座標，

$$u = r + x,$$

$$v = r - x,$$

を用いて，平面Kepler問題を設定せよ．これらの座標を用いて，Hamilton-Jacobiの方程式を求めよ．それを求積法に帰着させよ（少なくとも）．

10. 長さ$2l$，質量mの一様な棒の一端が滑らかで水平な床の上にあり，他端は滑らかな鉛直面上に支えられている．この棒は，その両端が常に上の2つの面上にあるように拘束されて，重力の下で運動するものとする．Hamilton-Jacobiの方程式のいずれかの形を用いて，問題の解を求積法の形に帰着させよ．

11. 1個の粒子が，次の式で与えられる曲線を描く，ジェット・コースター上を動くように拘束されている．

$$z = A\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}.$$

粒子には，通常の下向きの一定の重力が作用している．すべての可能な初期条件の下で，位相空間における系の代表点の軌道を論ぜよ．その際回帰点と，異なる型の運動の間の転移に特に注意をはらい，位相空間における軌道をできるだけ詳細に記述せよ．

p. 496

12. 質量mの質点が，平面上で，井戸型ポテンシャル，

$$V(r) = -V_0 \qquad 0 < r < r_0,$$

$$= 0 \qquad r > r_0,$$

の中を動いている．

a) どのような初期条件の下で，作用-角変数の方法が適用できるか？

b) これらの条件が成立するとして，作用-角変数の方法を用いて，運動の振動数を求めよ．

13. 1個の粒子が，Fを定数とするとき$V(x) = F|x|$で与えられるポテンシャルの影響の下に，1次元の周期運動をしている．作用-角変数を用いて，運動の周期を粒子のエ

ネルギーの関数として求めよ．

14.　質量 m の1個の粒子が，ポテンシャル $V(x) = -k/|x|$ の下で1次元運動をしている．負のエネルギーに対しては，運動は有界でかつ振動的である．作用–角変数の方法によって，この運動の周期に対する式を粒子のエネルギーの関数として求めよ．

15.　質量 m の1個の粒子が，次の式で表わされるポテンシャルを受けて1次元運動をしている．

$$V = \frac{a}{\sin^2\left(\dfrac{x}{x_0}\right)}.$$

Hamilton の特性関数に対する1つの積分表現を求めよ．どのような条件の下で，作用–角変数を使うことができるか？　これらの条件が満たされるとして，振動の振動数を，作用–角変数の方法によって見出せ（J に対する積分は，被積分関数を，その分母に平方根が現われるように操作することによって計算できる）．得られた結果を，振幅の小さい振動の極限でチェックせよ．

16.　質量 m の1個の粒子が，鉛直面内でパラメーターを用いて表わされた方程式，

$$y = l(1 - \cos 2\phi),$$
$$x = l(2\phi + \sin 2\phi),$$

によって定義される曲線上を動くように拘束されている．鉛直な y 方向には，通常の一定な重力が働いている．作用–角変数の方法を用いて，ϕ の最大値が，$\pi/4$ に等しいかそれより小さいようなすべての初期条件に対して，振動の振動数を見出せ．

17.　作用–角変数による定式化においては，Hamilton の特性関数の変数は，初めの座標 q_k と作用変数 J_k である．縮退のある場合には，縮退を零振動数に置き換えるために，引き続いて，(w_k, J_k) から新しい変数 (w'_i, J'_i) への正準変換が行われる．各 J_k を，（10－105）式で定義される J'_i という量の関数であると考えることによって，

$$\frac{\partial W}{\partial J'_i} = w'_i,$$

は，そのまま正しい式であることを示せ．

18.　第6章の演習問題12に述べられた系に対して，その Hamilton-Jacobi の方程式が分離可能であるような変数への1次の点変換を見出せ．さらに，作用–角変数を用いて，系の固有振動数を見出せ．

19.　3次元の調和振動子において，x，y 方向では力の定数が k_1 であり，z 方向に対しては力の定数が k_3 であるとする．円筒座標（円筒の軸は z 方向に向いている）を用いて，
p. 497

その運動を対応する作用–角変数を用いて記述せよ．振動数はどのようにして得られるかを示せ．縮退した振動数を消去するために，“固有の”作用–角変数に変換せよ．

20. 等しくない力の定数をもつ3次元調和振動子の振動数を，作用–角変数の方法を用いて求めよ．各直交座標および共役な運動量に対する解を，作用–角変数の関数として求めよ．

21. a）演習問題20の調和振動子において，すべての振動数が等しくなり（等方振動子），したがって運動が完全に縮退することを許すとする．エネルギーを作用変数のうちの1つだけの関数として表わして，“固有の”作用–角変数へ変換せよ．

b）球面極座標を用いて，等方振動子の問題を作用–角変数によって解け．再び，固有の作用–角変数へ変換し，(a)の結果と比較せよ．固有の変数の2つの組は同じであるか？　それらはどのような物理的意味をもつか？　この問題は，縮退した運動を，2つ以上の座標系で変数分離することができる可能性を示している．縮退していない振動子は直交座標においてのみ分離することができ，極座標では分離できない．

22. 縮退した平面調和振動子の運動は，任意の直交座標系において分離可能である．互いに θ の角をなす2つの直交座標系に対応する，2組の作用–角変数の間の関係を求めよ．2組の変数の間の変換は，回転を表わす直交変換ではないことに注意せよ．

23. a）複素平面における周辺積分の方法によって，Keplerの問題における J_θ 積分を計算せよ．積分を有用な形に変形するためには，$\cos\theta = x\sin i$ という置き換えをすればよいかも知れないことを示唆しよう．

b）（10－111）式の中の最後の積分を行うことによって，本文中で J_θ に対して用いられた積分の手順の正しいことを証明せよ．

c）軌道傾斜が90°よりも大きいとき，すなわち $\cos i$ が負のときの結果をたどって見よ．特に，（10－112）式，零振動数への正準変換，およびそれに伴う（10－122）式にはどのような変化が生じるか？　これらの式を，$\cos i$ が正あるいは負のいずれの場合にも成り立つような形に書くことができるか？

24. Keplerの問題における J_r に対する積分を，初等的な方法で計算せよ．このことは積分表を用いることを含んでいるが，もしそうするなら，用いた表について，はっきりとした詳しい参考文献を述べなければならない．

25. 本文で大筋の述べられた方法（あるいは何か別の方法）によって，3次元のKepler問題において $2\pi w_2 = \omega$ であることを示せ．ω は最近点の偏角である．

26. Keplerの軌道の，いわゆるPoincaré要素は次のように書くことができる．

$$w_1 + w_2 + w_3, \qquad J_\phi + J_\theta + J_r$$

$$\sqrt{\frac{J_r}{\pi}}\cos 2\pi(w_2 + w_1), \qquad \sqrt{\frac{J_r}{\pi}}\sin 2\pi(w_2 + w_1),$$

$$\sqrt{\frac{J_\theta}{\pi}}\cos 2\pi w_1, \qquad \sqrt{\frac{J_\theta}{\pi}}\sin 2\pi w_1.$$

それらは，正準座標の組を形づくることを示せ．新しい座標の組は左側の列，正準共役な運動量は右側の列に与えられているものである．

p. 498
27. 中心力ポテンシャルの場の中の，定常な円運動のまわりの，動径方向の小さい振動の現象を，作用–角変数による定式化における1次元問題として記述せよ．ポテンシャルの適当なTaylor級数展開を用いて，小さい振動の周期を見出せ．運動を，Jとそれに共役な角変数を用いて表わせ．

28. （8－54）式で与えられる形のハミルトニアンを用いて，相対論的なKeplerの問題を，作用–角変数の方法によって設定せよ．特に全エネルギー（静止質量を含む）が次の式で与えられることを示せ．

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{4\pi^2k^2}{[(J_3 - J_2)c + \sqrt{J_2{}^2c^2 - 4\pi^2k^2}]^2}}}.$$

軌道はやはり1平面内にはあるけれども，もはや閉曲線にはならないから，縮退は部分的に取り除かれていることに注意せよ．cが無限大に近づく極限においては，上のエネルギーの式は（10－123）式になることを示せ．

第11章　正準形式の摂動論

p.499

11−1 序　　論

これまで，この本で取り扱った古典力学のほとんどの問題は，本文中のものも演習問題の中のものも，厳密に解けるものであった．しかしながら，すべてとは言わないまでも，ほとんどの力学の問題に対して，完全な解が求められるというように考えてはならない．実際には，大多数の問題は厳密には解けないというのが，おそらく本当のところであろう．Kepler の 2 体問題に対する解は求められたが，3 個の質点に作用する力が，それらの間の万有引力のみであるような場合の，古典的運動は解けないことが証明されている．2 体問題の場合でも，座標を時間の関数として陽に与える，閉じた形の式が求められていないという意味では，解は間接的である (133 ページ，第 3 − 8 節参照)．このように，解を求めるための近似的な方法を展開することには，かなりの動機があるのである．

幸いなことに，直接解くことができない問題において，そのハミルトニアンが，厳密に解ける問題のハミルトニアンとほんのわずかしか異なら ないという場合がしばしばある．複雑な方の問題は，このとき，解ける問題の**摂動** (*perturbation*) といわれ，2 つのハミルトニアンの間の差は，**摂動ハミルトニアン** (*perturbation Hamiltonian*) と呼ばれる．摂動論というのは，摂動ハミルトニアンが小さいということに基づいて近似的な解を求めるための技法である．

ハミルトニアンのちがいは小さくなければならないが，摂動が運動に与える影響は時間が経過すると大きくなるかも知れないということには注意しなければならない．そこで，等方的平面調和振動子，すなわち，x，y 方向の運動に対

する振動数が等しい振動子を考えよう．点状振動子の軌道は単純な閉曲線，一般には楕円である．いま，y 方向の力の定数に無限小の摂動が生じ，２つの振動数が等しくなくなって，楕円軌道が乱されたとしよう．H におけるこの小さな摂動の結果，軌道はもはや閉曲線ではなくなり，時間が経つにつれて，空間のある部分を埋めつくすようになるであろう——大ざっぱにいえば，x, y 方向の振幅で決められる長方形内の各点を通るであろう．またすでに，点状の人工衛星の運動において，地球が扁平であることによって地球の重力場に生じる非常に小さな摂動の結果，同じように大きな定性的な変化が現われるということを見た．無摂動の中心力場においては，人工衛星の運動は１平面内に限られる．重力の４重極能率によるどのような摂動でも，それがどれほど小さいかによらず，初めの平面からはずれるような運動を引き起こす（ただし，４重極の軸は平面に垂直ではないとする）．

p.500

摂動論の発展は，天体力学の初期の頃までさかのぼる．例えば，ニュートンは月の運動における振動の大部分は，月が地球のまわりを回るときの，太陽からの引力の小さな変化によるものであることを理解していた．これらの効果を含む月の理論に関する彼の初期の試みは，ほぼ摂動論の形式に対応している．Hamilton の正準理論のような古典力学の形式的な構成についてのその後の発展の多くはその発端で，天体力学における摂動論の技法を完成させようとする要求が大きな影響を与えている．宇宙船等に対して極めて正確な軌道を予言することの必要性，および数値計算の能力が格段に進歩したことが，最近の摂動論の更に進んだ発展に拍車をかけた（しかしながら，これら最近の発展は，ほとんど本書の議論の範囲外のものである）．

古典力学における摂動論は，２つの方法に分けられる．すなわち，時間に依存する摂動論と，時間に依存しない摂動論とである．これらの用語は，量子力学に対して発展させられた摂動論を考慮して選ばれたものである．実際，古典論における摂動論の技法と，量子論でそれに対応するものとの間には，多くの類似点がある．一般的には，古典論における摂動論は，対応する量子論におけるものよりもかなり複雑である．はじめに，時間に依存する摂動論を取り扱うことにしよう．それはこの方が理解し易い形式だからである．摂動論は，古典

力学のすべての形式に対して展開することができるが，Hamilton-Jacobiの形式を用いるのが最も簡単である．

11－2　時間に依存する摂動（定数の変化）

解くことのできる，摂動のない問題に対するハミルトニアンを$H_0(q, p, t)$としよう．その解が，Hamiltonの主関数 $S(q, \alpha, t)$ を用いて得られたものとする．このSは，摂動のない問題に対しては，新しいハミルトニアン K_0が恒等的に零となるような正準変換を引き起こす．変換された正準変数(α, β)は，摂動がない場合にはすべて定数となる．次に摂動のある問題を考えることにして，そのハミルトニアンを，

$$H(q, p, t) = H_0(q, p, t) + \Delta H(q, p, t) \,, \qquad (11-1)$$

と書こう．前に強調したように，与えられた座標変換の正準変換としての性質は，ハミルトニアンの特定の形には依存しないから，$S(q, \alpha, t)$ によって引き起こされる変換，

$$(p, q) \to (\alpha, \beta) \,,$$

は，**摂動のある問題に対してもやはり正準変換である．**ただ，今度は新しいハミルトニアンは零とはならず，変換された変数は定数ではないかも知れない．摂動のある問題では，変換されたハミルトニアンは，

$$K(\alpha, \beta, t) = H_0 + \Delta H + \frac{\partial S}{\partial t} = \Delta H(\alpha, \beta, t) \,, \qquad (11-2)$$

p.501
となるであろう．したがって，変換された変数が満足する運動方程式は，この場合，

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial\, \Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial \beta_i}, \qquad \dot{\beta}_i = \frac{\partial\, \Delta H(\alpha, \beta, t)}{\partial \alpha_i} \;, \qquad (11-3)$$

となる．（11－3）式は厳密に成立しており，まだどのような近似もなされていない．もし，この$2n$個の方程式を解いて，α_i，β_iを時間の関数として求めることができれば，(p, q)と(α, β)の間の変換方程式からq_jおよびp_jが時間の関数として与えられる．すなわち，問題が解けるのである．しかしながら，方程式（11−3）

を厳密に解くことは，通常元の運動方程式を解くのよりも容易であるというようにはならない．したがって，厳密な解を求めるために（11－3）式を用いるという方法が，特に実り多いものであるということにはならない．

しかしながら，摂動論においては ΔH が小さいという事実を利用することができる．したがって，(α,β)という量は，もはや定数ではないが，少なくとも ΔH の時間についての陽な依存性と比較する限りでは，急激な変化はしない．(α,β)の時間変化に対する第1近似（first-order approximation）は，（11－3）式の**右辺の**αおよびβを，摂動のない場合のそれらの**一定の**値で置き換えることによって得られる．すなわち，

$$\dot{\alpha}_{1i} = -\left.\frac{\partial\,\Delta H(\alpha,\beta,t)}{\partial\beta_i}\right|_0; \qquad \dot{\beta}_{1i} = +\left.\frac{\partial\,\Delta H(\alpha,\beta,t)}{\partial\alpha_i}\right|_0, \tag{11－4}$$

として得られる．ここで，α_{1i} および β_{1i} はそれぞれ α_i，β_iに対する摂動の1次の解を表わし，下付きの0を持つ縦線は，微分の後にαおよびβを，それらの摂動のない時の値，すなわち定数(α_0,β_0)で置き換えるべきことを示すものである．（11－4）式は，正準変数βおよびαを成分とする列行列をγと書くことによって，行列形式に表わすことができる．すなわち，

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_1 = \mathbf{J}\left.\frac{\partial\Delta H(\boldsymbol{\gamma},t)}{\partial\boldsymbol{\gamma}}\right|_0, \tag{11－5}$$

と書くことができる．ここで $\mathbf{J}$ は（8－30）式によって与えられる行列である．（11－4）式を直接積分することによって，α_1およびβ_1を時間の関数として求めることができる．変換方程式によって，次に，(q,p)を摂動の1次で得ることができる．明らかに，2次の摂動は，αおよびβに対して1次の摂動で得られた時間についての依存性を，（11－3）式の右辺に用いることによって得ることができる．より高次の摂動についても同様である．一般に n 次の摂動に対する解は，（行列形式の）γ_nに対する次の方程式を積分することによって得られる．

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_n = \mathbf{J}\left.\frac{\partial\,\Delta H(\boldsymbol{\gamma},t)}{\partial\boldsymbol{\gamma}}\right|_{n-1}. \tag{11－6}$$

これらの処方のよく用いられる例として，摂動のない系が，質量mの粒子の力を受けていない1次元の運動である場合を考えよう．摂動のない場合のハミ

ルトニアンは，

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} ,$$

p. 502

である．明らかに運動量 p は保存される．その一定値を α としよう．この系に対する Hamilton-Jacobi の方程式は，

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 , \qquad (11-7)$$

となる．系は保存系であり，x はサイクリックであるから，Hamilton の主関数に対する解は直ちに知ることができて次のようになる．

$$S = \alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2m} . \qquad (11-8)$$

変換された運動量は α であり，変換された一定の座標は，

$$Q \equiv \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = x - \frac{\alpha t}{m} ,$$

あるいは，

$$x = \frac{\alpha t}{m} + \beta, \qquad (11-9)$$

で与えられるが，これは自由運動に対して予想される解である．(11－9) 式自身は自明なものであるが，Hamilton-Jacobi の方程式を用いた形式的な導出法から，少なくとも，上のように定義された α および β が正準変数の組になっていることが示されている．

さて，摂動ハミルトニアンが，

$$\Delta H = \frac{m\omega^2 x^2}{2} , \qquad (11-10)$$

で与えられる場合を考えよう．ただし ω はある定数である．全ハミルトニアンは，

$$H = H_0 + \Delta H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 x^2) , \qquad (11-11)$$

となる．すなわち，自由運動に対する摂動として，調和振動子のポテンシャル

を考えるのである！ 変数 α, β を用いると，摂動ハミルトニアンは，（11－9）式によって，

$$\Delta H = \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{\alpha t}{m} + \beta\right)^2, \tag{11-12}$$

となる．摂動を受けている系においては，α, β に対する運動方程式は（（11－3）式参照），

$$\dot{\alpha} = -m\omega^2\left(\frac{\alpha t}{m} + \beta\right), \tag{11-13a}$$

$$\dot{\beta} = \omega^2 t\left(\frac{\alpha t}{m} + \beta\right), \tag{11-13b}$$

となる．ここで，

$$\dot{\beta} + \frac{t}{m}\dot{\alpha} = 0, \tag{11-14}$$

p. 503
となることに注意しよう．そうすると，（11－13）式の厳密な解は，(11－13a)式を時間で微分することによって得ることができる．すなわち，

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2\alpha - m\omega^2\left(\dot{\beta} + \frac{\dot{\alpha}t}{m}\right) = -\omega^2\alpha. \tag{11-15}$$

となる．このように，摂動を受けている系における α は，厳密に調和振動と同じ時間変化を示す．（11－13a）および（11－9）式から，$x = -\dot{\alpha}/(m\omega^2)$ となるので，x に対する解もまた単振動になる．したがって，厳密な運動方程式と考えると，（11－13）式は確かに正しいよく知られた解を与えている．

さて，今度は $m\omega^2$（$\equiv k$，力の定数）を小さなパラメーターとして扱い，摂動解を求めてみよう．1次の摂動は右辺の α および β を，摂動のないときのそれらの値 α_0 および β_0 で置き換えることによって得られる．簡単のため最初は $x = 0$ であったとしよう．したがって $\beta_0 = 0$ である．また p の初期値は α_0 とする．そうすると，1次の運動方程式は，

$$\dot{\alpha}_1 = -\omega^2\alpha_0 t, \qquad \dot{\beta}_1 = \alpha_0\frac{\omega^2 t^2}{m}, \tag{11-16}$$

となる．この解は直ちに得られて，

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{\omega^2 \alpha_0 t^2}{2}, \qquad \beta_1 = \frac{\alpha_0 \omega^2 t^3}{3m}, \tag{11－17}$$

となる．これから，x および p に対する１次までの解は，

$$x = \frac{\alpha_1 t}{m} + \beta_1 = \frac{\alpha_0}{m\omega}\left[\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6}\right], \tag{11－18a}$$

および，

$$p = \alpha_1 = \alpha_0\left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2}\right], \tag{11－18b}$$

となる．（11－17）式を（11－13）式の右辺の α および β に代入すると，2次の運動方程式が得られて次のようになる．

$$\dot{\alpha}_2 = -\alpha_0 \omega^2\left(t - \frac{\omega^2 t^3}{6}\right), \qquad \dot{\beta}_2 = \frac{\alpha_0 \omega^2}{m}\left(t^2 - \frac{\omega^2 t^4}{6}\right). \tag{11－19}$$

この解は，

$$\alpha_2 = \alpha_0 - \frac{\omega^2 \alpha_0 t^2}{2} + \frac{\omega^4 \alpha_0 t^4}{24}, \tag{11－20}$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_0 \omega^2}{m}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{\omega^2 t^5}{30}\right),$$

p. 504
となる．これに対応して，x および p に対する２次の解は次のようになる．

$$x = \frac{\alpha_0}{m\omega}\left[\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!}\right],$$
$$p = \alpha_0\left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!}\right]. \tag{11－21}$$

これまでのことから，n 次の解がどのようになるかを十分知ることができる．すなわち，（11－21）式の括弧の中の量は，それぞれ sine および cosine の展開の最初の３項である．したがって，明らかに無限次の摂動の結果は，

$$x \to \frac{\alpha_0}{m\omega}\sin\omega t, \qquad p \to \alpha_0 \cos\omega t,$$

となるであろう．これは初期条件を満足する標準的な解である．

一定の値をとる変換された正準変数 (α, β) には，摂動のない軌道のパラメーターについての情報が含まれている．例えば，３次元の Kepler 問題で表わされ

る無摂動系の場合には，(α, β)の組として適当なものはDelaunay変数，すなわち，一定値をとる作用変数J_iおよびそれに対応する角変数w_iに含まれる定数項である．第10－7節で見たように，Delaunay変数は，軌道のパラメーター——半長軸，離心率，傾きの角等と簡単な関係にある．摂動の効果は，これらのパラメーターに時間的変化を生じさせることである．もし摂動が小さければ，摂動のない場合の運動の1周期の間でのパラメーターの変化もまた小さいであろう．時間に依存する摂動論——定数を変化させる方法——は，このようにして次のような描像を与える．すなわち，摂動を受けた系は，短い時間の間は無摂動系と同じ関数形で表わされる軌道上を運動するが，その軌道のパラメーターは時間的に変化していく，というものである．その系が瞬間的にたどる摂動のないときの軌道は“接触軌道”(osculating orbit)と呼ばれることがある．それは，位置と接線方向とが真の軌道と瞬間的に一致するようなものである．

摂動論の取り扱いによって接触軌道のパラメーターを決定するときには，その時間的変化には2通りのものがあり得る．1つは周期的な変化で，一定の時間後にパラメーターの値がその初期値に戻るものである．その時間は，摂動の1次では通常摂動のない場合の運動の周期になっている．あるいは第2に，パラメーターの値に，引き続く軌道の周期ごとに正味の増加が残るかも知れない．このときには，摂動を受けたパラメーターは**永年**変化(secular change)を示すといわれる．摂動による周期的な効果は，軌道のパラメーターを平均としては変えない．したがって，全体としては軌道は摂動の無いときの軌道と大変よく似ている．一方永年変化では，それが軌道の周期当りについてはどんなに小さくても，多くの周期の後には，結局摂動を受けたパラメーターの瞬間的な値が，摂動のない場合の値と全く異なるものになるかも知れない．それゆえ，摂動計算の主な興味は永年項のみにあり，周期的効果は，はじめの段階で摂動のない運動の周期にわたる平均操作によって消去されてしまう，ということがしばしばある．第5－8節において，地球が扁平であることによる重力ポテンシ
p.505
ャルの摂動を，人工衛星の周期にわたって平均したのは，実質的にはこのこと

を行ったのである（（5－90）式参照）.*

離心率とか傾きの角のような軌道“定数”の時間依存性を，正準変数の組(α,β)を仲だちとせずに直接求めたい場合がしばしばある．これはPoissonの括弧式を使って容易に行うことができる．いま，c_iを無摂動系に対する定数(α,β)の$2n$個の任意の独立な関数の組としよう．

$$c_i = c_i(\alpha, \beta). \tag{11－22}$$

このc_iのうち，1つまたはそれ以上のものが求めている軌道の定数かも知れない．このとき，摂動系におけるc_iの時間依存性は，運動方程式，

$$\dot{c}_i = [c_i, K] = [c_i, \Delta H], \tag{11－23}$$

によって決定される．しかし，$\Delta H(\alpha, \beta, t)$は，（11－22）式を逆に解くことによって，$c_i$および$t$の関数として考えてもよい．したがって，

$$\begin{aligned}[c_i, \Delta H] &\equiv \frac{\partial c_i}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \frac{\partial \Delta H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \frac{\partial c_i}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \frac{\partial \Delta H}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial \boldsymbol{\eta}} \\ &= [c_i, c_j] \frac{\partial \Delta H}{\partial c_j},\end{aligned}$$

となる．それゆえ，次のようになる．

$$\dot{c}_i = [c_i, c_j] \frac{\partial \Delta H}{\partial c_j}. \tag{11－24}$$

（11－3）式と同じく，（11－24）式はc_iに対する厳密な運動方程式である．それは，Poissonの括弧式も含めて右辺を摂動のない運動に関して計算すると，

*) このパラグラフに述べられたよりも複雑な事情もしばしば起こるであろう．例えば，軌道のパラメーターの周期的な変化において，2つ以上の周期があるかも知れない．このようなことは，摂動ポテンシャルがそれ自身に固有の周期性を持っている場合に起こることは明らかであろう．例えば，地球が太陽のまわりを公転していることを考慮したときの，地球と月から成る系の軌道に対する太陽の重力による摂動の変化がそうである．多重周期的な振舞は，摂動の間の相互作用を通じても起こり得る．そういうわけで，人工衛星のパラメーターの周期的な摂動には，短周期および長周期の両方があるかも知れない．そして，永年摂動の効果を見出すためには，両方の周期にわたって平均する必要がある．ときには，周期的摂動と永年摂動との区別が多少あいまいなこともある．1次の摂動では永年摂動として現われたもので，近似を上げると非常に長い周期の周期的摂動であることが判明することが時々ある．しかし，計算の目的によっては，それを永年摂動項として扱った方が良いこともある．それでも，周期的および永年的摂動の区別は有用であり，また通常は明瞭であって，特に1次の摂動論ではそうである．

1次の摂動方程式となる．一般に，n 次の摂動に対する方程式は，右辺を$(n-1)$ 次の摂動の結果を用いて計算することによって得られる．このように，(11－24)式を一般化したものは，(11－6)式に対応しているのである．

p. 506
(11－24)式をLagrangeの括弧式((9－77)式参照)を用いて表わしたものは，天体力学の文献にしばしば見出される．c_iに対する方程式にLagrangeの括弧式$\{c_k, c_i\}$をかけて i について和をとると，

$$\{c_k, c_i\}\dot{c}_i = \{c_k, c_i\}[c_i, c_j]\frac{\partial \Delta H}{\partial c_j} ,$$

となる．(9－83)式で表わされる定理を用いると，この式は次のように書き直せる．

$$-\frac{\partial \Delta H}{\partial c_j} = \{c_j, c_i\}\dot{c}_i \,. \qquad (11-25)$$

歴史的には，天体力学の摂動方程式は，$-\Delta H$ によって定義される**擾乱関数**(*disturbing function*) R を用いて表わされた．このときには，(11－25)式は次の形になる．

$$\frac{\partial R}{\partial c_j} = \{c_j, c_i\}\dot{c}_i \,. \qquad (11-25')$$

(11－24)式あるいは(11－25)式はしばしば，**Lagrange の摂動方程式**(*Lagrange perturbation equations*)と呼ばれる．時間に依存する摂動論のこれ以上の特徴については，実際にこの方法を適用する過程で議論するのが最も良いので，次の節でいくつかの典型的な例について論じよう．

11－3　時間に依存する摂動論の応用例

A．**有限な振幅の平面振子の周期．**　微小振動の極限では，平面振子は調和振動子のように振舞い，等時性を示す．すなわち，その振動数は振幅によらない．しかしながら，振幅が大きくなると，正しいポテンシャル・エネルギーは調和振動子に対するものからはずれ，振動数はわずかながら振幅に依存するようになる．正しいポテンシャル・エネルギーと調和振動子の極限のポテンシャル・エネルギーとの小さな差を摂動ハミルトニアンと考えることができ，また振動

数のずれは摂動を受けた位相角の時間変化から導くことができる．次の第11－4節において，時間に依存しない摂動論を用いても同じ振動数のずれが見出されるであろう．

長さ l の質量のない棒と，その端にある質点 m とから成る平面振子に対するハミルトニアンは，

$$H=\frac{p^2}{2ml^2}+mgl(1-\cos\theta), \qquad (11-26)$$

となる．ここで，簡単のために，θ に共役な運動量を p と記した．$\cos\theta$ の項をTaylor級数に展開すると，ハミルトニアンは次のように書くことができる．

$$H=\frac{p^2}{2ml^2}+\frac{mgl\theta^2}{2}\left(1-\frac{\theta^2}{12}+\frac{\theta^4}{360}-\cdots\right)\cdot \qquad (11-27)$$

p. 507

微小振動の極限をとるということは，括弧の中の第1項を除いて全て落とすということである．補正項の大きさは，技巧的に，パラメーター，

$$\theta_1^2=\frac{2E}{mgl}, \qquad (11-28)$$

および，関連したパラメーター，

$$\lambda=\frac{\theta_1^2}{6}=\frac{E}{3mgl},$$

を導入することによって見当をつけることができる．このとき，括弧内の級数は，

$$1-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2+\frac{\lambda^2}{10}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^4-\cdots$$

のようになる．ところで，比 θ/θ_1 は最大振幅のところで1のオーダーまで増加する．実際 θ_1 は，E，したがって振幅が小さいときの最大振幅である．よって，展開の収束の速さは，λ の大きさによって決定される．1つの補正項だけを取り入れるとすると，1次の摂動は運動に λ のオーダーの項を導入する．同じ摂動ハミルトニアンを用いた2次の摂動は，λ^2 のオーダーの項を導入する．よって，矛盾のないように，λ^2 まで正しい運動の補正を得るためには，ハミルトニ

アンの中の λ の項についての2次の摂動と，λ^2 の項についての1次の摂動とを計算しなければならないであろう．しかしここでは，λ のオーダーまでについて矛盾のない取り扱いをするに留めよう．すなわち，ハミルトニアンの中の最初の補正項だけを残し，1次の摂動の解を求めるのである．

(11－27)式から導かれる摂動のないハミルトニアンは，

$$H = \frac{1}{2I}(p^2 + I^2\omega^2\theta^2), \tag{11-29}$$

と書け，調和振動子のものと同じ形になる((10－14)式参照)．ここで，$I = ml^2$ は振子の慣性モーメントであり，また

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I} = \frac{g}{l}, \tag{11-30}$$

である．K が零となる無摂動系に対する適切な正準変数は，作用変数 J と角変数の中の位相角 β である．それは次のように与えられる．

$$w = \nu t + \beta, \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{11-31}$$

摂動の効果は，J および β の両方を時間的に変化させるということに現われる．p および θ を，それぞれ J および β に関係づける変換方程式は，すでに(10－78)および(10－79)式に与えられていて，この場合は次の形となる．
p.508

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt{\frac{J}{\pi I\omega}}\sin 2\pi(\nu t + \beta), \\ p &= \sqrt{\frac{IJ\omega}{\pi}}\cos 2\pi(\nu t + \beta). \end{aligned} \tag{11-32}$$

無摂動系では，J および β は定数であり，(11－32)式が運動方程式の完全な解になっている．しかし，摂動がある場合でも式そのものは成立し，ただ J と β が求めるべき時間依存性を持つようになるだけである．

摂動のない場合のハミルトニアンは，$H_0 = J\nu$ であり，摂動ハミルトニアンは，

$$\Delta H = -\frac{mgl}{24}\theta^4 = -\frac{J^2}{24\pi^2 ml^2}\sin^4 2\pi(\nu t + \beta), \tag{11-33}$$

の形をとる．β および J の１次の時間依存性は，

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \Delta H}{\partial J}, \qquad \dot{J} = -\frac{\partial \Delta H}{\partial \beta}, \tag{11－34}$$

から得られる．ただし，各式の右辺には摂動のないときの解，すなわち J, β を定数としたものを用いなければならない．そうすると，

$$\dot{\beta} = -\frac{J}{12\pi^2 ml^2} \sin^4 2\pi(\nu t + \beta), \tag{11－35}$$

となる．(11－35) 式は，１次のオーダーに対しては $\dot{\beta}$ が摂動のない振動の周期にわたって変化することを述べている．しかし，$\sin^4$ の平均は 3/8 なので，完全な周期にわたって平均すると，$\dot{\beta}$ は零にならない．したがって，β は，

$$\overline{\dot{\beta}} = -\frac{J}{32\pi^2 ml^2}, \tag{11－36}$$

によって与えられる一定の変化率を持つ永年摂動 (secular perturbation) を示す．摂動のないときの周期にくらべて長い時間にわたって見ると，β は

$$\beta = \overline{\dot{\beta}} t + \beta_0 \tag{11－37}$$

のような時間依存性を持っている．このような変化を (11－32) 式に代入してみると，平均としては１次の摂動の解は依然として単純調和振動子であって，その振動数は，

$$\nu' = \nu + \overline{\dot{\beta}},$$

であることがわかる．さて，摂動のない運動では，

$$J = \frac{2\pi E}{\omega} = 2\pi\omega \frac{El}{g},$$

p. 509
であるから (11－36) 式の $\overline{\dot{\beta}}$ は，

$$\overline{\dot{\beta}} = -\frac{\omega E}{16\pi mgl} = -\frac{\nu\theta_1^2}{16}, \tag{11－38}$$

となる．したがって，有限の振幅 θ_1 における振動数の変化の割合は，

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\overline{\dot{\beta}}}{\nu} = -\frac{\theta_1^2}{16}, \tag{11－39}$$

で与えられる．この結果はよく知られていて，運動を楕円関数を用いて表わしたものの近似としても得ることができる*.

J の時間的変化は，摂動の1次まででは，(11－33)および(11－34)式から

$$\dot{J} = -\frac{J^2}{3\pi ml^2}\sin^3 2\pi(\nu t+\beta)\cos 2\pi(\nu t+\beta),$$

となる．$\sin^3\phi\cos\phi$ の平均は ϕ の半周期についてでさえも零である．したがって，J は永年摂動を示さない．この結果は，物理的には次のようにして予想することもできるだろう．すなわち，J は摂動の振幅の尺度を表わすものであるが((11－32)式参照)，摂動は振幅を増加させたり減少させたりするようなものではないからである．

B．**束縛されたKepler問題における中心力の摂動．** 第3章の練習問題14において，Coulombポテンシャルに $1/r^2$ の形のポテンシャルが付け加えられると，束縛されている場合の軌道は，**回転している**座標系から見ると楕円であることが厳密に証明された．実際には，楕円は回転し，最近点(periapsis)は歳差運動を示す．ここでは，1次の摂動論を用いて，歳差運動の速さを求めよう．ただし，摂動ポテンシャルとしては，幾分一般的な形のものを考えることにする．

いま，全ポテンシャルが，

$$V = -\frac{k}{r} - \frac{h}{r^n}, \tag{11-40}$$

であるとしよう．ここで n は＋2以上の整数であるとする．定数 h は，第2項が第1項に対する小さい摂動であるようなものと仮定しよう．このとき，摂動ハミルトニアンは，

$$\Delta H = -\frac{h}{r^n}, \qquad n \geqslant 2, \tag{11-41}$$

である．摂動のない問題では，最近点の軌道面内における角方向は，定数 $\omega =$

---

*) 例えば，K. R. Symon, *Mechanics*, 3rd ed., p. 215, 特に(5－35)式を見よ．

$2\pi w_2$ で与えられる（（ 10－140 ）式参照）．摂動があると，ω は，

$$\dot{\omega} = 2\pi\frac{\partial \Delta H}{\partial J_2} = \frac{\partial \Delta H}{\partial l}, \qquad (11-42)$$

p.510
によって決定される時間依存性をもつ．ここで，$J_2 = 2\pi l$ という関係（（ 10－131 ）式）を用いた．1次の摂動の結果は，ΔH およびその導関数を，摂動のないときの解を用いて計算すれば得られる．さらに，ω の瞬間的な変化には多くの場合興味がない．摂動論の定式化が有効なほとんどの場合に，$\dot{\omega}$ は大変小さくて，軌道を1周する間の ω の変化を認めることは困難であるか，あるいは不可能である．それで，多くの軌道を描いた後にはじめて，ω の永年変化を測定すれば十分である．したがって，要求されるのは，摂動のないときの軌道の周期 τ の時間間隔での $\dot{\omega}$ の平均である．

$$\overline{\dot{\omega}} \equiv \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\frac{\partial \Delta H}{\partial l}\,dt\,.$$

ここで，微分は積分の外に出すことができる．なぜなら，τ は J_3 のみの関数であり（（ 10－119 ）式と（ 10－123 ）式を組み合わせよ），他方，微分は $l = J_2/2\pi$ に関するものだからである．したがって，

$$\overline{\dot{\omega}} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\Delta H\,dt\right) = \frac{\partial\overline{\Delta H}}{\partial l}\,, \qquad (11-43)$$

となる．ところが，ここでは摂動ハミルトニアンの時間平均は，

$$\overline{\Delta H} = -h\overline{\left(\frac{1}{r^n}\right)} = -\frac{h}{\tau}\int_0^{\tau}\frac{dt}{r^n}\,, \qquad (11-44)$$

である．$l\,dt = mr^2\,d\psi$ の形の角運動量の保存則を用いると，積分は ψ についてのものに変換されて，

$$\overline{\Delta H} = -\frac{mh}{l\tau}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{r^{n-2}} \qquad (11-45)$$

$$= -\frac{mh}{l\tau}\left(\frac{mk}{l^2}\right)^{n-2}\int_0^{2\pi}(1+e\cos(\psi-\psi'))^{n-2}\,d\psi, \qquad (11-45')$$

となる．ここで r は，（ θ の代りに ψ を用いた）軌道の方程式（ 3－51 ）を用いて ψ で表わした．一般に，離心率 e の偶数次のべきを含む項のみが，積分に

零でない寄与をするであろう．また，（10－134）式によって，e は J_2 および J_3 のみの関数であるから，l に関する導関数も e およびそのべきを含んでいる．

2つの特別な場合が特に興味がある．1つの場合は，この例のはじめに簡単に述べたように $n=2$ のときに起こるものである．このときには，摂動ハミルトニアンの平均は単に，

$$\overline{\Delta H} = -\frac{2\pi mh}{l\tau},$$

となり，永年的歳差運動の速さは，

$$\bar{\dot{\omega}} = \frac{2\pi mh}{l^2\tau}, \qquad (11-46)$$

となる．これは，第3章の演習問題14の結果と一致している．

p.511

他の興味ある場合は，$n=3$（摂動ポテンシャルが $1/r^3$）に対するもので，この場合には，（11－45′）式は

$$\overline{\Delta H} = -\frac{2\pi m^2 hk}{l^3\tau},$$

となり，

$$\bar{\dot{\omega}} = \frac{6\pi m^2 hk}{l^4\tau}, \qquad (11-47)$$

となる．この n の値を選んだことに特に意味があるのは，一般相対性理論がNewton力学の定める運動に対して，r^{-3} ポテンシャルによるものと解釈できる補正項を予言している，ということがあるからである．Einsteinの場の方程式に対するいわゆるSchwarzschildの球対称な解は，Kepler問題においては，（11－41）式の形で $n=3$，かつ，

$$h = \frac{kl^2}{m^2c^2}, \qquad (11-48)$$

であるハミルトニアンへの付加項に対応しているのである*．このとき（11－47）

*）W. M. Smart, *Celestial Mechanics*（New York, Wiley, 1953）p. 243を見よ．ここでは，等価な摂動ポテンシャルを最初に認識したのはEddingtonであるとされている．もっと最近の参考文献としては，Misner, ThorneおよびWheelerによる部厚い書物，*Gravitation*（San Francisco, California: Freeman, 1973）を見よ．r^{-3} ポテンシャルは，その書物のp. 668にある（25.42）式で与えられる等価な1次元のエネルギー方程式から出発して，入念に組み立てられた記号の列を注意深く解釈して進み，大抵の式では c はほとんど無視できるということを思い出せば，導き出すことができる．

式は,

$$\overline{\dot{\omega}} = \frac{6\pi k^2}{\tau l^2 c^2}, \qquad (11-49)$$

となる.（11－49）式を太陽のまわりを回る物体の歳差運動の永年歳差運動の速さに対して，適用するには，k を GMm とおき，摂動のない楕円軌道に対して成立する（3－63）式を,

$$l^2 = mka(1-e^2), \qquad (11-50)$$

の形で用いる．そうすると（11－49）式は,

$$\overline{\dot{\omega}} = \frac{6\pi}{\tau(1-e^2)}\left(\frac{R}{a}\right), \qquad (11-51)$$

の形になる．ここで R はいわゆる太陽の重力半径† で,

$$R = \frac{GM}{c^2} = 1.4766\,\mathrm{km}, \qquad (11-52)$$

p. 512
である．水星に対しては $\tau = 0.2409$ 恒星年，$e = 0.2056$，$a = 5.790 \times 10^7\,\mathrm{km}$ である．このとき，一般相対論から予言される水星の近日点の歳差運動の平均の速さは，（11－51）式によって

$$\overline{\dot{\omega}} = 42.98''/\mathrm{century},$$

となる．観測される水星の近日点の永年歳差運動は，この値よりも100倍以上大きく，$5599.74 \pm 0.41''$/century である．この大部分は分点の歳差運動，すなわち銀河に対する黄経の基準点の運動，によるものである（第5章，295ページを見よ）．残りのうちのおよそ $531.34''$/century は，他の惑星による水星の軌道に対する摂動によるものである．これらの2つの効果を，観測される歳差運動から引き去った後にはじめて，一般相対論の小さな効果が見えるようになる．1973年の計算* によると，この残りは $41.4'' \pm 0.9''$/century である．これと，理論的予言の間の差には意味があるとは考えられない．

---

†）数値は1968年のJPLの天文学定数集に基づいている．W. G. Melbourne et al., JPL Technical Report 32-1306, July 15, 1968 を見よ．

*）C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (1973), p. 1112.

1つ説明すべきことが残っている．相対論的効果への適用において，(11－48)式の定数 h は l の値の関数になっている．したがって，$\dot{\omega}$を求めるときに，l についての微分が h にも作用しないのはなぜかという疑問が起こるかも知れない．要点は，h は正準運動量としての l の関数にはなっていないということである．(11－48)式は，定数 h の値が，軌道のパラメーター l の値を用いてどのように決められるか，ということを述べているにすぎないのである．言い換えれば，摂動ポテンシャルは，力学変数としては r のみの関数であって，速度に依存していると解釈してはいけないのである．

C．**分点および衛星の軌道の歳差運動．**　ここで考察される問題は，前に第5－8節で同じ題目の下で論じられた．ここでは，万有引力によって相互作用している2つの物体の相対運動について述べることにしよう．ただし，1つの物体は球対称あるいは点状とし，もう1つの物体はわずかに扁平であって重力的4重極能率を持つとする．地球の場合には，わずかに扁平な形の効果は，物理的には，赤道方向のふくらみに作用する太陽および月のトルクによって，地球の回転軸の非常にゆっくりした歳差運動が引き起こされるということである．逆にいえば，月や人工衛星のような，地球のまわりを軌道運動している物体に対する効果は，その軌道面を地球の対称軸のまわりに歳差運動させるということである．歳差運動が非常に遅いということで示される，重力的4重極能率の大きさが小さいということは，摂動論による取り扱いが極めて良い近似であることを示唆している．ここでは，実際には衛星の軌道の摂動の場合のみを調べるが，分点の歳差運動という逆の現象の取り扱いも，(記法は違うが)同じ摂動ハミルトニアンからほとんど同様に進めることができる．後者は，演習問題として残しておこう．

p. 513
ここでは，点状の衛星がずっと重い地球のまわりを運動している場合に力点がおかれるので，第5－8節の記号を逆にして，mを衛星の質量，Mを地球の質量を表わすために用いることにしよう．そうすると，(5－88)式によって，衛星に作用する全ポテンシャルは，

$$V = -\frac{k}{r} + \frac{k}{M}\frac{(I_3 - I_1)}{r^3}P_2(\gamma), \qquad (11-53)$$

となる．ここに，$k = GMm$であり，γは衛星の動径ベクトルと，地球の対称軸とのなす角θのcosineである．したがって，摂動ハミルトニアンとしては，

$$\Delta H = k\frac{I_3 - I_1}{2Mr^3}(3\cos^2\theta - 1), \qquad (11-54)$$

が得られる．極角θは，軌道の傾きの角i，および軌道面内における動径ベクトルの最近点に相対的な角ψ（いわゆる真近点離角）を用いて，

$$\cos\theta = \sin i \sin(\psi + \omega), \qquad (11-55)$$

という関係*によって表わされる．ここでωは最近点引数（argument of the periapsis）である．少し計算をすると，ΔHの角度依存性を次のように書き直すことができる．

$$3\cos^2\theta - 1 = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\cos^2 i) - \tfrac{3}{2}\sin^2 i\cos 2(\psi + \omega). \qquad (11-56)$$

さて，摂動は小さいので，主な興味は永年摂動の累積効果にある．このように，軌道の歳差運動は，節線の角Ω（すなわち昇交点黄経，689ページを見よ）の永年変化として現われる．前の例で行ったのと同じ議論によって，微分する前にΔHを平均することによって永年効果を求めることができる．

$$\begin{aligned}\overline{\Delta H} &\equiv \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \Delta H\,dt = \frac{m}{l\tau}\int_0^{2\pi} r^2\,\Delta H\,d\psi \\ &= \frac{m^2k^2(I_3 - I_1)}{2Ml^3\tau}\int_0^{2\pi}(1 + e\cos\psi)(3\cos^2\theta - 1)\,d\psi. \qquad (11-57)\end{aligned}$$

（11－56）式の中の$\cos 2(\psi + \omega)$を含む項は，積分区間内では1および$\cos\psi$の両方に直交しているから，積分には寄与しない．したがって，平均された摂動ハミルトニアンは，

*）（11－55）式は，多くの方法で求めることができる．例えば，軌道面をxy平面に変換する回転行列を用いても求められる．しかし，最も簡単なのは，おそらく図10－5に基づいて三角法を用いる旧式のやり方であろう．すなわち，$OB = 1$，$BC = \cos\theta$であるが，$AB = \sin(\psi + \omega)$であるから，BCはまた$\sin i \sin(\psi + \omega)$とも表わせる．

$$\overline{\Delta H} = \frac{\pi m^2 k^2 (I_3 - I_1)}{2Ml^3\tau}(1 - 3\cos^2 i), \qquad (11-58)$$

p. 514
となる．Ωと i とを作用-角変数に結びつける（10－132）および（10－139）式を考慮すると，$\overline{\dot{\Omega}}$ に対する1次の摂動による値は，

$$\overline{\dot{\Omega}} = 2\pi\overline{\dot{w}_1} = 2\pi\frac{\partial\overline{\Delta H}}{\partial J_1} = \frac{1}{l}\frac{\partial\overline{\Delta H}}{\partial\cos i},$$

から求められて，

$$\overline{\dot{\Omega}} = -\frac{3\pi m^2 k^2 (I_3 - I_1)\cos i}{Ml^4\tau},$$

となる．最後に，（11－50）式を用いると，摂動のないときの周期当りのΩの平均の変化は，

$$\frac{\overline{\dot{\Omega}}\tau}{2\pi} = -\frac{3}{2}\frac{I_3 - I_1}{Ma^2}\frac{\cos i}{(1-e^2)^2}, \qquad (11-59)$$

となる．これは，（5－96）式の衛星の楕円軌道に対する適切な一般化になっている．

ひとたび摂動ハミルトニアンが知られれば，他の軌道パラメーターの平均に対する摂動の効果を求めることができる．例えば，軌道面内における最近点の方向の永年歳差運動は直ちに求められて，

$$\overline{\dot{\omega}} = 2\pi\overline{\dot{w}_2} = 2\pi\frac{\partial\overline{\Delta H}}{\partial J_2} = \frac{\partial\overline{\Delta H}}{\partial l},$$

で与えられる．正準変数 J_2 は，ΔH の中には（11－58）式で与えられるように，2つの形で現われる．1つは分母の l^3 に，もう1つは $\cos i = J_1/J_2$ を含む項にである．微分を実行すると，

$$\frac{\overline{\dot{\omega}}\tau}{2\pi} = \frac{3}{4}\frac{I_3 - I_1}{Ma^2(1-e^2)}(5\cos^2 i - 1), \qquad (11-60)$$

が得られる．このように，$\overline{\dot{\omega}}$ の最大値は $\overline{\dot{\Omega}}$ のそれとおよそ同じであるが，i についての依存性は全く異なる．63°26′および116°34′という傾斜の角（臨界傾斜角（critical inclinations））においては，（少なくとも1次の摂動では）最近点の歳差運動はなくなり，この点の上下で符号が変わる．明らかに，1次までで

は a にも e にも永年変化はない．というのは $\overline{\Delta H}$ には角変数の定数部分は全く含まれていないからである．接触する楕円の形と大きさは，軌道の周期にわたって平均すると，時間的に変化しないのである．

前の2つの例から，一般相対論的補正および重力的4重極能率の場は共に，軌道運動をしている物体の最近点に歳差運動を生じさせるということに注意しよう．それゆえ，R. Dickeは，観測された水星の近日点の移動が，わずかに扁平になっている太陽の重力場によるものとして説明できないかという疑問を提出したのである．部分的な答は，これまでに得られた摂動論の結果から知ることができる．Keplerの法則から，惑星の運動の周期はその半長軸の3/2乗に比例する，ということを思い出そう．このとき，一般相対論によって予言される歳差運動の速さは，(11－51)式によれば異なった惑星に対しては $a^{-5/2}$ のように変わらなければならないことになる．もしも歳差運動が，太陽が扁平であることによるものならば，(11－60)式は $a^{-7/2}$ の依存性を予言することになる．水星以外の惑星に対するデータは，粗いものではあるが，一般相対論の予言の方に近くなっている．いずれであるかを決めるより強力な因子は，おそらく水星軌道の昇交点の歳差運動であろう．もしも，太陽が扁平であることによる万有引力場の効果が，近日点の移動を説明するのに十分な位であるならば，そのときには(11－59)式によって，それに伴う昇交点の歳差運動が認められるはずである．それに対照的に，一般相対論的な摂動は全く中心力的である．すなわち，角運動量ベクトル，したがって軌道面の法線は影響を受けない．観測からは，他の既知の摂動によっては説明されないような昇交点の歳差運動は認められない．ある程度の観測誤差はあるけれども，それらは太陽が扁平であることから予言されるものの数分の1である．したがって，太陽の万有引力場の4重極成分は，近日点の移動において観測される異常性のわずかの部分しか説明し得ないように思われる．

p. 515

11－4　時間に依存しない1次の摂動論，1自由度の場合

時間に依存しない摂動論は，無摂動系において定数であったものの時間的な変化を問題にするというよりはむしろ，摂動を受けた系において一定であるよう

な量を求めようとするのである．したがって，この方法は，保存系が変数分離可能で周期的であるという摂動のない状態における性質を，摂動を受けてもそのまま保つという場合にのみ適用できる．これらの制限内においても数多くの興味ある問題がある．例えば，天文学的なスケールでは，結局惑星の運動はKepler運動に対するすべての保存的な摂動を完全に考慮に入れても，３つの座標のすべてに対して依然として周期的である．また，原子の古典的描像においても，Zeeman効果のように，磁場による摂動は電子の運動が周期的であるということを定性的には変えない．天体力学では，時間に依存しない摂動論は通常 von Zeipelの方法として知られている*．ここでは，この方法を古い量子論における必要性のために，Bornが発展させたものを述べることにする．

簡単のために，はじめは１自由度のみをもつ系に対し，更に１次の場合について定式化しよう．次の節でこれらの制限を取り除くことにしよう．作用-角変数 w_0, J_0 およびハミルトニアン $H_0(J_0)$ で記述される摂動のない周期的な系を考えよう．摂動のないときの振動数は，

$$\nu_0 = \frac{\partial H_0}{\partial J_0}, \qquad \text{また}\; w_0 = \nu_0 t + \beta_0, \tag{11-61}$$

p. 516
で与えられる．系が，w_0 に関して周期１で周期的であるという性質から，q は，

$$q = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k(J_0) e^{2\pi i k w_0}, \tag{11-62}$$

の形のFourier級数として書くことができる**((10－91)式と比較せよ)．p も同様に表わされる．さて，摂動を加えて，ハミルトニアンが，

$$H = H_0 + \epsilon H_1, \tag{11-63}$$

の形になったとしよう．ここで ϵ はある小さなパラメーターであって，零から連続的に変えられるものとする．摂動を受けた系も周期的だから，系に対する適当な作用-角変数の新しい組 (w, J) が存在し，$H = H(J)$ となる．新しい J は

*) Poincaréの方法としても知られている．von Zeipelの方法という呼び方は，短周期の摂動と長周期の摂動とを分離して取り扱うという方法に対して用いられることもある（748ページの縮退の議論を参照せよ）．しかし，それは実際的には統一性をもたない．章末の参考文献の項およびR. A. Howland, Jr., *Celestial Mechanics* 15, 327 (1977)，特にその第1節を見よ．

**) 和の規約は使わない方が都合がよい．

定数で，w は時間の１次関数である．すなわち，

$$w = \nu t + \beta, \tag{11－64}$$

と表わされ，新しい振動数は $H(J)$ から得られる．ところが，(w_0, J_0) は摂動を受けた系に対しても依然として正準変数である．というのは，それらは，はじめの組 (q, p) と正準変換で関係づけられているからである．繰り返し強調されたように，変換が正準変換であるという性質，したがって変数の組が正準変数であるという性質は，ハミルトニアンの特定な形には依存しない．しかし，ここでは J_0 は定数ではなく，また w_0 は時間の１次関数ではない．それにもかかわらず，q は依然として w_0 の周期関数である．なぜなら，（11－62）式は w_0 および J_0 で q を表わす正準変換の式にほかならないからである．したがって，q が運動の完全な１周期の変化を行うと，w および w_0 は共に１だけ増加することになる．

それゆえ，２つの正準変数の組 (w_0, J_0)，(w, J) は正準変換で結ばれていなければならず，その変換の母関数 $Y(w_0, J)$ は Hamilton の特性関数に対する Hamilton-Jacobi の方程式から求めることができる．摂動ハミルトニアンは小さいから，求める母関数と恒等変換の母関数との差は僅かでなければならない．したがって，ϵ の１次まででは，

$$Y(w_0, J) = w_0 J + \epsilon Y_1(w_0, J), \tag{11－65}$$

のように書くことができる．求めたいのは，H の J に対する関数関係である．それがわかれば，摂動を受けたときの摂動数 ν が求まる．もちろん，H はパラメーター ϵ の関数でもある．J および ϵ の関数としての H を $\alpha(J, \epsilon)$ と記せば，１次までとると，

$$\alpha(J, \epsilon) = \alpha_0(J) + \epsilon\alpha_1(J), \tag{11－66}$$

と書ける．したがって，

$$H(w_0, J_0) = H\left(w_0, \frac{\partial Y}{\partial w_0}\right) = \alpha$$

に対する Hamilton-Jacobi の方程式は，ϵ の１次までとると，

p. 517

$$H_0\left(\frac{\partial Y}{\partial w_0}\right) + \epsilon H_1\left(w_0, \frac{\partial Y}{\partial w_0}\right) = \alpha_0(J) + \epsilon\alpha_1(J), \qquad (11-67)$$

と書くことができる．ここで，H_0およびH_1は，Yを通じて依然としてϵの関数である．ϵについて1次までの項のみである(11－67)式の右辺を得るためには，H_1の中のYは，明らかに，その第0近似である$w_0 J$で置き換えなければならない．更に，H_0の中のJ_0は，変換の方程式，

$$J_0 = \frac{\partial Y}{\partial w_0} = J + \epsilon\frac{\partial Y_1}{\partial w_0},$$

を利用して，Jを用いて表わすことができる．H_0をJの関数としてϵの1次までで表わすためには，$H_0(J_0)$を$J_0 = J$のまわりのTaylor級数に展開して，ϵについて最初の項だけを残せばよい．Taylor展開における導関数は，厳密にはJ_0に関する導関数の$J_0 = J$における値であるが，$H_0(J_0)$の中のJ_0にJを代入したものの，Jに関する導関数としても厳密性は失なわれない．したがって，(11－67)式におけるH_0の項は，

$$H_0\left(J + \epsilon\frac{\partial Y_1}{\partial w_0}\right) = H_0(J) + \epsilon\frac{\partial Y_1}{\partial w_0}\frac{\partial H_0(J)}{\partial J}, \qquad (11-68)$$

と書くことができる．(11－61)式を考慮すると，いまやHamilton-Jacobiの方程式は次のようになる．

$$H_0(J) + \epsilon\left[H_1(w_0, J) + v_0\frac{\partial Y_1}{\partial w_0}\right] = \alpha_0(J) + \epsilon\alpha_1(J). \qquad (11-69)$$

について同じべきの項を等しいと置けば，$\epsilon \to 0$の極限から予想することができる

$$\alpha_0(J) = H_0(J), \qquad (11-70)$$

および，

$$\alpha_1(J) = H_1(w_0, J) + v_0\frac{\partial Y_1}{\partial w_0}, \qquad (11-71)$$

が得られる．(11－71)式は，一見したところでは幾分奇妙に見える．というのは，左辺はJのみの関数であるのに対して，右辺は見掛け上Jおよびw_0の両方の関数になっているからである．これからいえることは，Y_1は右辺のw_0に依

存する項を打ち消して，w_0に依存しない定数項のみを残すようになっていなければならないということである．しかし，Y_1の導関数が定数項を含まないことは容易にわかる．すなわち，wを決めるための変換の方程式は，

$$w=\frac{\partial Y}{\partial J}=w_0+\epsilon\frac{\partial Y_1}{\partial J}\,, \qquad (11-72)$$

p. 518
である．したがって系が１周期の運動を行った後，wおよびw_0が共に１だけ進むためには，Y_1がw_0の周期関数でなければならないことになって，

$$Y_1(w_0,J)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k(J)\,e^{2\pi ikw_0}\,, \qquad (11-73)$$

と書くことができる．実際 Y_1が（11－73）式の形を持つという条件が，(w,J)が作用-角変数であることを許すのである．したがって，（11－73）式から，$k=0$すなわち定数項に対するw_0に関する Y_1 の導関数は恒等的に零になる．このようにして，（11－71）式は，

$$\alpha_1(J)=\overline{H_1(w_0,J)}-\left[(\overline{H}_1-H_1)-\nu_0\frac{\partial Y_1}{\partial w_0}\right], \qquad (11-74)$$

と書くことができる．ここで横線はw_0の完全な１周期にわたっての平均を表わす．α_1がJのみの関数であるならば，括孤の中の量は零にならなければならず，したがって次の２つの条件が得られる．

$$\alpha_1(J)=\overline{H_1(w_0,J)}, \qquad (11-75)$$

および，

$$\frac{\partial Y_1}{\partial w_0}=\frac{\overline{H}_1-H_1}{\nu_0}. \qquad (11-76)$$

このうち，第１の式は，Hの（１次までの）Jに関する関数関係がどのようにすれば決定できるかを示している．すなわち，摂動ハミルトニアンを(w_0,J_0)を用いて摂動のない運動で表わし，それを運動の完全な１周期にわたって平均する．そうするとJ_0についての依存性が残るが，それは（この次数まででは）α_1のJについての依存性と同じである．したがって，αを用いると新しい振動数は，

$$\nu = \frac{\partial \alpha(J)}{\partial J} = \nu_0 + \epsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial J}, \tag{11-77}$$

のように与えられる．第2の方程式（11－76）は，H_1 の振舞に注意すれば $Y_1(w_0, J)$ に対する微分方程式となる．Y_1 が求まれば，(w_0, J_0) と (w, J) との関係が1次まで求まり，さらに（11－62）および（11－64）式によって，時間の関数としての (q, p) に対する解が求められる．しかしながら，新しい振動数だけを求めたい場合には，Y_1 を求める必要は全くないということに注意しよう．すなわち，この次数まででは，（11－75）式だけで十分なのである．

この古典的な定式化は，量子力学における時間に依存しない摂動論を知っている人達には親しみ深い形である．量子力学では，1次の摂動において，エネルギー固有値（ハミルトニアンの固有値）のずれは，摂動ハミルトニアンの行列要素（すなわち摂動のない運動に関する平均値）で与えられる．エネルギーのずれを求めるには，今の場合に Y_1 が不必要であったのと同様に，摂動を受けた波動関数についての知識は必要ではないのである．

簡単な例で上述の手続きを見てみよう．第11－3節で扱った有限振幅の平面 p. 519 振子の問題を考えよう．（11－33）式から，摂動のハミルトニアンは J_0, w_0 を用いて，

$$\epsilon H_1 = -\frac{J_0^2}{24\pi^2 m l^2} \sin^4 2\pi w_0, \tag{11-78}$$

と書くことができる（ここで l は単に振子の長さを表わしているだけであることを思い出そう）．パラメーター ϵ としては，（11－28）式の小さな量 θ_1^2，すなわち摂動のない場合の振幅の2乗をとるのが都合が良いであろう．$\sin^4\theta$ の1周期の平均は3/8だから，α_1 の関数形は，

$$\alpha_1(J) = \bar{H}_1 = \frac{-J^2}{64\pi^2 m l^2 \theta_1^2},$$

となり，また，

$$\frac{\nu - \nu_0}{\epsilon} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial J} = -\frac{J}{32\pi^2 m l^2 \theta_1^2}, \tag{11-79}$$

となる．$\nu - \nu_0$ を ϵ の1次までで計算する場合は，J を J_0 で置き換えることが

できる．さらに，(10 − 76) および (11 − 28) 式から，

$$J_0 = \frac{2\pi E}{\omega_0} = \frac{\pi mgl\theta_1^2}{\omega_0} = 2\pi^2 ml^2 \theta_1^2 \nu_0, \qquad (11-80)$$

となる．したがって，(11 − 79) 式は，

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial J} = -\frac{\nu_0}{16},$$

という簡単な形になり，ν の変化の割合は，

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \equiv \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = -\frac{\theta_1^2}{16},$$

となって，(11 − 39) 式の結果と一致している．

場合によっては，H_1が零となり 1 次の摂動が有用な結果を与えないことがある．例えば，いわゆる非調和振動子では，摂動ハミルトニアンの 1 次の項はϵq^3の形になるが，$\sin^3 2\pi w_0$の平均値は零となり，1 次までは振動数のずれはなく，より高次の近似をしなければならない．2 次またはより高次の摂動，および多くの自由度を持つ系への一般化という課題は次の節で扱われる．

11 − 5　高次の時間に依存しない摂動論

前節の議論を任意の自由度を持つ保存的・周期的かつ分離可能な系に対して摂動パラメーター ϵ の高次までもう一度たどってみよう．無摂動の問題に対しては，無摂動ハミルトニアンH_0が作用変数J_{0i}のみの関数となり，対応する角変数 w_{0i} が時間の 1 次関数であるような 1 組の作用−角変数 (w_{0i}, J_{0i}) があると仮定しよう．(10 − 91′) 式の記法を用いると，例えば，q_k と w_{0i} との関係はまとめて

$$q_k = \sum_{\mathbf{j}} A_{\mathbf{j}}^{(k)}(\mathbf{J}_0)\, e^{2\pi i \mathbf{j}\cdot\mathbf{w}_0}, \qquad (11-81)$$

と書くことができる．ここで，$\mathbf{j}$，$\mathbf{w}_0$，および $\mathbf{J}_0$はそれぞれ，整数の指標，角変数および作用変数を表わす n 次元ベクトルである．

摂動を受けた系においても，$(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0)$ は正準変数の組として有効である．$(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0)$ という組を用いて表わすと，摂動を受けたハミルトニアンは，小さな摂動パラ

メーター ϵ のべきに展開することができる.

$$H(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0, \epsilon) = H_0(\mathbf{J}_0) + \epsilon H_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0) + \epsilon^2 H_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0) + \cdots . \qquad (11-82)$$

さて, $(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0)$ から, $\mathbf{J}$ が定数で従って $\mathbf{w}$ が時間の1次関数であるような新しい組 $(\mathbf{w}, \mathbf{J})$ への正準変換を求めよう. この組を用いると, H は $\mathbf{J}$ (および ϵ) のみの関数となり, $\mathbf{J}$ に関するその関数形は,

$$\alpha(\mathbf{J}, \epsilon) = \alpha_0(\mathbf{J}) + \epsilon\alpha_1(\mathbf{J}) + \epsilon^2\alpha_2(\mathbf{J}) + \cdots , \qquad (11-83)$$

のように書かれるであろう. ϵ の与えられた次数までの摂動を受けた振動数を求めるには, 関数 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ を見出せば十分である. というのは, 振動数を表わすベクトルは,

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_0 + \epsilon\frac{\partial\alpha_1}{\partial\mathbf{J}} + \epsilon^2\frac{\partial\alpha_2}{\partial\mathbf{J}} + \cdots , \qquad (11-84)$$

となるからである.

$(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}_0)$ から $(\mathbf{w}, \mathbf{J})$ への正準変換の母関数は, $Y(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}, \epsilon)$ の形であり, ϵ についての展開は,

$$Y(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}, \epsilon) = \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{J} + \epsilon Y_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) + \epsilon^2 Y_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) + \cdots , \qquad (11-85)$$

と表わされる. Y を, 適当な Hamilton-Jacobi の方程式,

$$H\left(\mathbf{w}_0, \frac{\partial Y}{\partial\mathbf{w}_0}, \epsilon\right) = \alpha(\mathbf{J}, \epsilon) , \qquad (11-86)$$

の解として求めよう. 前と同様に, ϵ の与えられた次数までの α の中の項は, 両辺を ϵ のべきに展開し, 両辺の同じ次数の項の係数を集めることによって求めることができる. その手続きを2次の計算に対する例で示そう. Hamilton-Jacobi の方程式はこのとき,

$$H_0\left(\frac{\partial Y}{\partial\mathbf{w}_0}\right) + \epsilon H_1\left(\mathbf{w}_0, \frac{\partial Y}{\partial\mathbf{w}_0}\right) + \epsilon^2 H_2\left(\mathbf{w}_0, \frac{\partial Y}{\partial\mathbf{w}_0}\right)$$
$$= \alpha_0(\mathbf{J}) + \epsilon\alpha_1(\mathbf{J}) + \epsilon^2\alpha_2(\mathbf{J}), \qquad (11-87)$$

p. 521
となる. 左辺の各項は, Y の導関数を通じても ϵ の関数になっている.

$$\mathbf{J}_0 = \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} + \epsilon^2 \frac{\partial Y_2}{\partial \mathbf{w}_0} . \qquad (11-88)$$

そこで再び，H_iを $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}$ のまわりの Taylor 級数に展開する．このときには，H_0については ϵ^2 まで，H_1については ϵ まで，H_2については $\mathbf{J}_0$を直接 $\mathbf{J}$ で置き換えたものを残す．そうすると，行列の記法を用いれば，H_0および H_1に対する展開は，

$$H_0\left(\frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}\right) = H_0(\mathbf{J}) + \left(\epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} + \epsilon^2 \frac{\partial Y_2}{\partial \mathbf{w}_0}\right)\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{J}} + \frac{1}{2}\left(\epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0}\right)\frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{J}\,\partial \mathbf{J}}\left(\epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0}\right), \qquad (11-89)$$

$$H_1\left(\mathbf{w}_0, \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{w}_0}\right) = H_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) + \epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0}\frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{J}}, \qquad (11-90)$$

となる．(11－87) 式における ϵ のべきを集めると，α の最初の 3 項に対して次の式が導かれる．

$$\alpha_0 = H_0(\mathbf{J}), \qquad (11-91\mathrm{a})$$

$$\alpha_1 = \mathbf{v}_0 \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} + H_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}), \qquad (11-91\mathrm{b})$$

$$\alpha_2 = \mathbf{v}_0 \frac{\partial Y_2}{\partial \mathbf{w}_0} + \Phi_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}). \qquad (11-91\mathrm{c})$$

ここで，

$$\Phi_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) = H_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) + \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0}\frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{J}} + \frac{1}{2}\frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0}\frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{J}\,\partial \mathbf{J}}\frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} , \qquad (11-92)$$

である．再び，$\mathbf{w}$ と $\mathbf{w}_0$とを結ぶ変換の方程式は，

$$\mathbf{w} = \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{J}} = \mathbf{w}_0 + \epsilon \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{J}} + \epsilon^2 \frac{\partial Y_2}{\partial \mathbf{J}} + \cdots , \qquad (11-93)$$

で与えられる．変数の組 (q, p) が $\mathbf{w}_0$および $\mathbf{w}$ の両方に関して，共に周期 1 の周期関数であるためには，すべての Y_k が $\mathbf{w}_0$の周期関数であって，

$$Y_k(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}) = \sum_{\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^{(k)}(\mathbf{J})\, e^{2\pi i \mathbf{j}\cdot \mathbf{w}_0}, \qquad (11-94)$$

の形をしていなければならない．したがって，Y_kの $\mathbf{w}_0$に関する導関数は定数項を含まず，(11－91b, c) 式の右辺の第 1 項は $\mathbf{J}$ 依存性に寄与しない．そこで

(11－91) 式は次のように書くことができる.

$$\alpha_0(\mathbf{J}) = H_0(\mathbf{J}), \qquad (11-95\,\mathrm{a})$$

$$\alpha_1(\mathbf{J}) = \overline{H_1(\mathbf{w}_0, \mathbf{J})}, \qquad (11-95\,\mathrm{b})$$

$$\alpha_2(\mathbf{J}) = \overline{\Phi_2(\mathbf{w}_0, \mathbf{J})}. \qquad (11-95\,\mathrm{c})$$

p. 522
ここで横線は，すべての $\mathbf{w}_0$ の周期に関する平均値を示す. (11－95) 式は便宜的に，

$$\alpha_i(\mathbf{J}) = \overline{\Phi_i(\mathbf{w}_0, \mathbf{J})}, \qquad (11-95')$$

という共通の形で表わすことができる. ここで $\Phi_0 = H_0$，$\Phi_1 = H_1$ である. さらに，(11－91) 式には，平均値が零となる $\mathbf{w}_0$ の周期関数,

$$\boldsymbol{\nu}_0 \frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{w}_0} = \overline{\Phi}_i - \Phi_i \qquad (11-96)$$

も含まれている.

$i = 0, 1$ に対しては，(11－91 a)，(11－95) および (11－96) 式は，摂動のない運動のすべての振動数を含んでいるという点を除いては，前の節で見出されたものと同じ形をしている. 2次の摂動では，Y_1 を含む項は平均しても必ずしも零にならないことに注意しよう. Y_1 の導関数そのものは平均すると確かに零になるが，それと $\mathbf{w}_0$ の周期関数になっているであろう他の関数との積は，その平均が零になることは保証されない. したがって，振動数に対する2次の摂動を求めるためには，1次の正準変換を知る必要がある (これに対応して量子力学では，固有値の2次の摂動には波動関数の1次の摂動項が含まれる). 原理的には，(11－94) 式を通じて Y_1 を定義している係数 $B_J^{(1)}$ は，$i = 1$ に対する (11－96) 式から直接求められる. 平均値を引き算するということは，$H_1 - \overline{H_1}$ が，(11－81) または (11－94) 式と同様であるが定数項を含まない Fourier 級数に展開できる，ということを意味している. すなわち，

$$H_1 - \overline{H_1} = -\sum_{\mathbf{j} \neq 0} C_{\mathbf{j}}(\mathbf{J})\, e^{2\pi i \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}_0}, \qquad (11-97)$$

と書くことができる. (11－96) 式において，$\mathbf{w}_0$ の1つ，例えば w_{0k} に関する

導関数を作ると，$2\pi i j_k$という因子が出る．したがって，(11 − 96) 式の左辺の行列の積は，

$$\mathbf{v}_0 \frac{\partial Y_1}{\partial \mathbf{w}_0} = \sum_{\mathbf{j} \neq 0} B_{\mathbf{j}}^{(1)}(\mathbf{J}) 2\pi i (\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_0) e^{2\pi i \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}_0}, \tag{11-98}$$

と書くことができる．(11 − 96) および (11 − 97) 式から，Y_1に対する級数の中の係数は，

$$B_{\mathbf{j}}^{(1)}(\mathbf{J}) = \frac{C_{\mathbf{j}}(\mathbf{J})}{2\pi i (\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_0)}, \qquad \mathbf{j} \neq 0, \tag{11-99}$$

と求められる．確かに Y_1 の中の定数項はこの方法では決められないが，α_i の式の中にはいってくるのは Y_1 の導関数だけであり，それらには定数項は含まれない．

上では，２次の摂動に対してのみ詳細な手続きを実行したが，より高次の計算の一般的な形も同様であるにちがいないことは容易にわかる．計算の詳細がより複雑になるだけである．第 i 次の摂動に対しては，α_i は再び次の形に書くことができるであろう．

$$\alpha_i(\mathbf{J}) = \mathbf{v}_0 \frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{w}_0} + \Phi_i(\mathbf{w}_0, \mathbf{J}). \tag{11-91d}$$

p. 523
右辺の第１項は，$\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}$ のまわりの $H(\mathbf{J}_0)$ の Taylor 展開における１階の導関数を含む項で，差 $\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}$ の ϵ^i 次までのすべての項を残した部分から出てきたものである．Y_i はこの項にのみ現われる．したがって，Φ_i は i 次よりも低次の母関数 Y_k のみを含むことができる．１次および２次の摂動に対してすでに用いられた議論によって，(11 − 91d) 式の右辺の第１項は，$\mathbf{w}_0$の完全な１周期にわたって平均した値は零になり，したがって (11 − 95) および (11 − 96) 式はすべての次数で成立する．もちろん，$i > 2$ に対しては Φ_i は (11 − 92) 式より増々複雑になるが，それはより低次の計算においてすでに求められている関数のみを含んでいる．このように一歩一歩進めば，原理的には任意の次数の摂動計算を遂行することができる．

このような一連の計算においては，もちろん実際上の問題もあるが，最も深刻で明らかな概念上の困難が生じるのは，無摂動系が縮退しているとき，すな

わち，振動数の組$\mathbf{v}_0$の中に同じ大きさのものがあるときである.（10－101）式からわかるように，縮退があるということは，指標のベクトル$\mathbf{j}$で，$\mathbf{j}\cdot\mathbf{v}_0=0$となるものが少なくとも1つはあるということを意味している．それに対応するY_1のFourier級数における係数$B_{\mathbf{j}}^{(1)}$は，それゆえ（11－99）式によって無限大となる．実際には，無摂動系が縮退して**いない**ときでも同様なことが起きているのである．振動数が正確には同じ大きさでない場合でも，整数の指標$\mathbf{j}$をだんだん大きくして行くと，遂には$\mathbf{j}\cdot\mathbf{v}_0$が零ではないが非常に小さくなるようなベクトル$\mathbf{j}$が見出されるであろう．そのときには，対応する係数$B$は非常に大きくなる（いわゆる"小さな分母"（small divisor）の問題）*．この大雑把で定性的な観察が，Y_1，従って運動に対するFourier級数は半収束（semiconvergent）であるということの，Poincaréによる前世紀末のエレガントな証明の基礎となっている．それにもかかわらず，指標のもっともらしい値までで止めた有限項の和が，少なくともあまり長い時間を問題にするのでなければ，極めて正確な結果を与えている．

縮退がある場合には何ができるかについては後で議論することにして，ここでは1自由度の系という特別な例を用いて，2次の計算の例を示すのが良いであろう．

1次元の**非調和振動子**（*anharmonic oscillator*），すなわち，ポテンシャル・エネルギーにq^3の項を持つ系を考えよう．そのハミルトニアンは，

$$H=\frac{1}{2m}\left[p^2+m^2\omega_0^2q^2\left(1+\epsilon\frac{q}{q_0}\right)\right], \qquad (11-100)$$

と書くことができる．ここでω_0は摂動のないときの角振動数である．

$$\omega_0=2\pi\nu_0=2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot$$

p. 524

q_0は基準となる振幅であるが，差当りは特定しないでおく．またϵは小さな無次元のパラメーターである．ϵのべきに展開することを考えると，Hは次の項

*）同様な現象が，量子力学でも見出されることが思い出されるであろう．この場合には，縮退というのは同じエネルギーEを持ついくつかの状態があるということである．このときには，分母はE_i-E_jの形であって，零であるか，厳密な縮退はなくても小さくなる．

から成る.

$$H_0 = \frac{1}{2m}[p^2 + m^2\omega_0^2 q^2], \tag{11－101a}$$

$$H_1 = \frac{m\omega_0^2 q^3}{2q_0}, \tag{11－101b}$$

および,

$$H_i = 0, \qquad i \geqslant 2. \tag{11－101c}$$

摂動のないときの作用–角変数 (J_0, w_0) を正準変数として用いると，Hの零にならない部分は,（10－78）および（10－79）式によって,

$$H_0 = J_0 v_0 , \tag{11－102a}$$

および,

$$H_1 = \frac{m\omega_0^2}{2q_0}\left(\frac{J_0}{\pi m\omega_0}\right)^{3/2} \sin^3 2\pi w_0 , \tag{11－102b}$$

と書くことができる.（11－95a, b）式の処方によって，$\alpha(J)$の低次の２項は次のように与えられる.

$$\alpha_0(J) = Jv_0; \qquad \alpha_1(J) = 0 .$$

２次の項 $\alpha_2(J)$を求めるために，H_0はJについて１次であり，H_2は零であるから，Φ_2は,

$$\Phi_2 = \frac{\partial Y_1}{\partial w_0}\frac{\partial H_1}{\partial J},$$

となることに注意しよう．しかし，$\overline{H_1}$が零になるということは，$i = 1$に対する（11－96）式が,

$$\frac{\partial Y_1}{\partial w_0} = -\frac{H_1}{v_0},$$

という簡単な形になることを意味する．これら２つの結果を結びつけると,

$$\Phi_2 = -\frac{1}{2v_0}\frac{\partial H_1^2}{\partial J}, \tag{11－103}$$

が導かれる．さて,（10－102b）式から,

$$H_1^2(w_0, J) = \frac{\nu_0 J^3}{2\pi^2 m q_0^2} \sin^6 2\pi w_0,$$

であるから，次の結果が導かれる．

$$\Phi_2(w_0, J) = -\frac{3J^2}{4\pi^2 m q_0^2} \sin^6 2\pi w_0. \qquad (11-104)$$

$\sin^6$ の 1 周期にわたる平均は 15/48 だから，$\alpha_2(J)$ は簡単な形，

$$\alpha_2(J) = -\frac{15J^2}{64\pi^2 m q_0^2}, \qquad (11-105)$$

p. 525
となり，ϵ の 2 次まででは，摂動を受けたときの振動数は，

$$\nu = \frac{\partial\alpha}{\partial J} = \nu_0 - \epsilon^2 \frac{15J}{32\pi^2 m q_0^2}, \qquad (11-106)$$

となる．q_0 としては，摂動のない場合に，与えられたエネルギーに対して振動子が持つであろう最大振幅を用いるのが便利である．したがって，

$$\frac{m\omega_0^2 q_0^2}{2} = E,$$

または，最低次では，

$$m q_0^2 = \frac{J}{\pi\omega_0}, \qquad (11-107)$$

となる．この基準の振幅を用いると，(10 − 106) 式は 2 次まででの振動数のずれの割合が，簡単に，

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{15}{16}\epsilon^2, \qquad (11-108)$$

であるという式と等価である．2 次の摂動のその他の例や，多くの自由度を持つ系に対する摂動論の例は演習問題に与えられている．

縮退があるために，すなわち (11 − 99) 式の分母の $\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\nu}_0$ が零 (または零に近い値) になるために生じる摂動論における困難については，すでに言及しておいた．縮退の取り扱いは，古典力学における摂動論の場合の方が量子力学における場合よりもはるかに複雑である．ある側面では，特に縮退に近い場合の取り扱いに関連して，縮退の問題は，まだ発展しつつある研究テーマになって

いる．この問題を取り扱うために用いられる数学は，精巧かつ複雑であり，現在の発展状況を完全な形で述べるには，ここは場ちがいであろう．したがって，この時点では，いくつかの簡単で入門的な事柄だけを述べることができるにすぎない．

摂動のない場合の振動数 $\mathbf{v}_0$ が，1組またはそれ以上の組の整数の組 $\mathbf{j}$ に対して $\mathbf{j}\cdot\mathbf{v}_0=0$ となるとき，第10－6節におけるのと同様に，厳密な（exact）（あるいは“固有の”（proper））縮退と呼ぼう．そのときには，第10－6節で指摘したように，縮退は零振動数のみに現われ，残りの零でない振動数は縮退していないような新しい変数の組 $(\mathbf{w}_0,\mathbf{J}_0)$ へ変換を行うことができる．摂動の効果は，縮退を取り除き，したがって対応する振動数が厳密に零ではなく小さい値を持つようにすることである．その結果，解の中に小さい振動数，すなわち，長い周期の項が現われる．対応する角変数は，“おそい”変数（“slow”variables）として知られている．それに対して，縮退していない振動数を持つ角変数は，“速い”変数（“fast”variables）と呼ばれる．長い周期の項は，限られた時間内では永年項のように見えるかも知れない．例えば，$\sin 2\pi\nu t$ は $\nu t\ll 1$ の範囲では t の1次関数と考えることもできる．

厳密な縮退があるときには，まず $(\mathbf{w}_0,\mathbf{J}_0)$ という変数の組に正準変換する．無摂動ハミルトニアンは，縮退のない $\mathbf{J}_0$ 変数だけの関数になるであろう．その
p. 526
他のすべての点では，（11－82）式は依然として完全なハミルトニアンを表わしている．さて，摂動計算の正準変換を実行しよう．ただし，縮退した変数は変えないようにして，縮退のない変数のみを変換するのである．そうすると，新しいハミルトニアンに対する（11－83）式は，実質的には次の形をとる．

$$\alpha(\mathbf{J},\mathbf{J}_0',\mathbf{w}_0',\epsilon)=\alpha_0(\mathbf{J})+\epsilon\alpha_1(\mathbf{J},\mathbf{J}_0',\mathbf{w}_0')+\epsilon^2\alpha_2(\mathbf{J},\mathbf{J}_0',\mathbf{w}_0')+\cdots\ .$$

ここで，$\mathbf{w}_0'$ は m 個の（縮退した）変数を表わし，摂動のない問題では零となる．また，$\mathbf{J}_0'$ はそれに共役な運動量である．変換された，縮退のない場合の運動量は，$\mathbf{J}$ で表わされている．このようにして，正準変換の結果，“速い”変数は消去されるが，“おそい”変数は残される．α は $\mathbf{w}$ についてはサイクリックなので，変換された運動量 $\mathbf{J}$ は正確に運動の定数である．したがって，$\alpha(\mathbf{J},\mathbf{J}_0',\mathbf{w}_0',\epsilon)$ は

自由度mの系のハミルトニアンと考えることができる．さらに，$\alpha_0(\mathbf{J})$は定数であって，残りの変数とは無関係だから，$(\mathbf{J}_0', \mathbf{w}_0')$の運動方程式には関係せず，$\alpha$から落とすことができる．このようにして，新しい有効ハミルトニアン（effective Hamiltonian）は，いまやϵのオーダーになる．実質的には，"無摂動ハミルトニアン"が$\epsilon\alpha_1(\mathbf{J}, \mathbf{J}_0', \mathbf{w}_0')$であり，この摂動のない問題では$\mathbf{w}_0'$はもはや零のみを成分とはしなくなっている．もし，縮退の条件が1つだけであるならば，実質的な問題は1自由度のものになり，原理的には直ちに積分できる．縮退の条件が2つ以上あれば，"速い"変数を消去したのと全く同様にして，"おそい"変数を消去するための第2の正準変換を求めることができる．実際には，この手続きが大変複雑になることは明らかである．

以前に，（11－99）式に関連して，縮退のない振動数に関しても，$\mathbf{j}$がだんだん大きくなって行くときに，分母$\mathbf{j}\cdot\mathbf{v}_0$の値が不可避的に小さくなることが起こる，ということを指摘しておいた．この現象は"共鳴"（*resonance*）といわれ，Fourier展開の特定の項が非常に大きくなるということを意味している．したがって，摂動のないときの振動数がなんであっても，縮退の問題は常に存在するように思われるかも知れない！ しかし，事情はそれ程悪くはない．その理由の一部は，実際に出会う摂動ハミルトニアンの性質によるものである．（11－99）式から，実際に効くのは$\mathbf{j}\cdot\mathbf{v}_0$の値よりはむしろ，比

$$\frac{C_{\mathbf{j}}}{\mathbf{j}\cdot\mathbf{v}_0},$$

であることに注意しよう．ここで$C_{\mathbf{j}}$は，摂動ハミルトニアンH_1のFourier級数展開の係数である（（11－97）式参照）．少なくとも天体力学においては，ほとんどの摂動ハミルトニアンは，いわゆる***D'Alembert*の特性**（*D'Alembert characteristic*）を持っている．その性質の，形式的数学的な定義は複雑であるが，* その大雑把な意味は次のようなものである．すなわち，指標$\mathbf{j}$の中の整
p. 527
数の値がハミルトニアンの中のϵのべきよりも大きくなれば，$C_{\mathbf{j}}$の大きさは，指標の値の増加と共に，一般的には指数関数的に急速に減少するということで

*) G. E. O. Giacaglia, *Perturbation Methods in Non-linear Systems* (New York: Springer-Verlag, 1972), pp 279–280を見よ．

ある．そのときには，（11－99）式における比はあまり大きくはならず，振動数 ν_0 が無理数の条件（irrationality condition）を満足すれば，展開は実際上収束することを証明できる．

D'Alembert の特性を持つ場合，あるいは一般に $C_{\mathbf{j}}/(\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\nu}_0) < O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ のときには，**浅い共鳴**（*shallow resonance*）と言われる．少なくとも原理的には，浅い共鳴は摂動展開の手続きを無効にすることはなく，新しい方法を導入せずにすますことができる．比 $C_{\mathbf{j}}/(\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\nu}_0)$ が大きくなる場合，少なくとも $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ のオーダーよりも大きくなる場合がある．このような場合は，**深い共鳴**（deep resonance）と呼ばれる．深い共鳴を扱うには特殊な方法を工夫しなければならない．特別な方法として，ϵ よりは $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ のべきに展開する．いわゆる Bohlin 展開がある．さらに進もうとすると，非線形振動における共鳴現象という，広くかつ急速に発展している分野に立ち入ることになるが，その分野について十分な取り扱いをしようとすれば，別の独立な解説が必要となるであろう．

11－6　天体および宇宙空間力学における摂動論の特殊な技法

すでに記したように，摂動論と天体力学とは Newton の時代以来相伴って発展してきた．天体力学の特定な必要に応じて，多くの特殊な方法が開発されてきた．宇宙探査と，現代のディジタル計算機の（ほとんど同時といえる）誕生と急速な発達は，ほとんど休止状態にあったこの分野に生命をよみがえらせ，摂動論に対する新しいアプローチの仕方やその新鮮な見方を生み出した．このことについての昔および現代の長い歴史を詳細に議論するつもりはまったくない．ここでは，そのおよその流れを説明し，文献の中にしばしば使われる特殊な用語を紹介しようとするだけである．

しばしば，解析的な公式に導く**一般的な**（*general*）摂動論と，摂動を受けた系に対する方程式の数値解を含むような**特殊な**（*special*）摂動法とが区別される（両者の混合された方法もあるので，この区別は大まかなものである）．上で議論された摂動論の体系は，すべて一般的摂動論の例である．天体力学においてなされた摂動法に対する試みは，すべて“一般的”なものである．最初の技法は“定数変化の方法”であったが，18 世紀に誤った方向に出発し，不完

全な形に発展した．最終的には，1782年にLagrangeがこの方法を確固とした基礎の上に乗せることに成功した（もちろん，上に述べたような正準形式を用いたものではないが）．

天体力学における摂動法の組立ては，扱おうとする問題の性質の特殊性に大いに影響される．最近まで，考慮されたすべての力は万有引力で，ほとんどの場合質点間のものであった．月の問題，すなわち地球のまわりの月の運動は，太陽による摂動が，ほとんどすべての他の天文学的な場合よりもかなり大きいために，常に大きな問題となってきた．Newton以来，何世紀にもわたって月 p. 528 の理論という“主要な問題”に対して繰り返し攻撃が行われてきた．この問題では，地球と月は2個の質点として扱われ，それらの質量中心は，太陽のまわりに固定されたKeplerの楕円上を運動するとされた．この単純化されたモデルにおいてさえも，摂動ハミルトニアンの形を考えることによって，情況の複雑さの一端を見ることができる．ΔHの中にはいってくるのは，3個の物体間の距離の成分だけである．しかしこれらの距離は，3つの動径ベクトルおよびそれらの間の角の複雑な関数であり，特に運動が一平面内に限られていない場合にはそうである．通常は，ΔHの中の項はこれらの角のFourier級数で表わされる．次に，これらの角は種々のKeplerの近点離角を用いた複雑な級数で表わされ，そして最終的には時間の関数として表わされる．その結果，ハミルトニアンは摂動のないときの運動を用いて表わしたときでも，多重3角級数で表わさなければならない．通常は擾乱関数（disturbing function）$R = -\Delta H$の形で，ΔHの適当な展開を見出すために，一般的摂動論において多くの数学的な努力がなされている．

19世紀のはじめに発展させられたもう1つの一般的摂動論は，“座標の変分”（variation of coordinates）と呼ばれることがある．その最も簡単な形は，摂動を受けた2体問題の場合であって，運動方程式は直交座標を用い，摂動ハミルトニアンは $\Delta H = \epsilon V_1$ の形に書かれる．このとき運動方程式は，

$$\mu\ddot{x}_i = -\frac{kx_i}{r^3} - \epsilon\frac{\partial V_1}{\partial x_i},$$

のようになる．ここでμは2体問題の換算質量である．次にϵについてのべき

展開，

$$x_i = x_i^{(0)} + \epsilon x_i^{(1)} + \epsilon^2 x_i^{(2)} + \cdots,$$

を運動方程式に代入し，ϵ のべきについて整理して解を求めようとするのである．この方法は，求めている摂動を受けた座標を直接与えるという長所を持つが，摂動によって軌道がどのように変わり，軌道のパラメーターがどう変わるかについての描像を与えることはできない．

月の理論という“主要な問題”に対する，1860 年代の Delaunayの解析的な解において，一般的摂動論の技法は 1 つの頂点に達した．彼の処方は， von Zeipel の方法の第 1 版とでも言えるようなものである．実質的には，彼は擾乱関数に含まれている 1 つの角に依存する各々の周期的な項を，別々な正準変換で取り除いたのである．20 年間の努力の後，Delaunay は結果を 2 冊の厚い書物として出版したが，それらの書物には，地球や月の軌道の離心率や，地球と月の平均角速度の比のような小さい量に関するべき展開などの，接触要素 (osculating elements) の摂動を受けた運動に対する代数的な公式以外はほとんど含まれていない．これら小さな量全部についてのべきが 7 次，場合によっては 9 次まで残されている．そのために必要となる代数的計算の分量は愕然とさせられるほどのものである —— 500回以上の正準変換が要求され，含まれる項の数は 10,000 個以上になる —— そのすべてが，手伝いなしに，手でなされたのである．

p. 529
半数値的な面のある，より高度な方法が 19 世紀の末までに工夫された．それらの方法には，いわゆる中間軌道 (intermediary) という，それからの摂動が観測される，より複雑な基準になる軌道が含まれている．その基本的なモデルを説明するためにも，多くのスペースを必要とするであろうからここで与えることはできない．したがって，それらの方法のうちのいくつかの名前を挙げる以上のことはできない ——例えば，Hansen の方法，あるいは Hill の方法などがある．

人工衛星とディジタル計算機が，摂動論の方法を新たに見直す必要性と機会とをもたらした．レーダーおよびレーザー観測は，天体の座標を観測する精度

を数桁上げた．その結果，月や内惑星についてそれまであった表は不十分であることがわかった．堀とDepritは1960年代に，独立にvon Zeipelの方法を改良し，定式化し直して，少なくとも概念的には計算を大いに単純化した．von Zeipelの方法では，時間の関数としての運動を求めるには，wの関数としてのw_0を見出すために，変換の式(11－93)を逆に解かなければならない．この逆変換は，体系的なやり方で解析的な形で実行することは，しばしば非常に困難である．Depritが提案した方法は，非常に小さいϵの極限における無限小正準変換の式から，有限の大きさのϵに対する変換の式を作り上げることである．基本的な原理としてはI. C. Tの下での関数の変化を支配する微分方程式に対するPoissonの括弧式で表わした解を使うのである((9－116)および(9－117)式を参照せよ)．この解を作る逐次的な方法や，擾乱関数の入れ子になった級数展開のために要求される繰り返しのステップは，コンピューターの代数的処理に向いたものである．このような方法で，Depritと彼の協力者達は，1970年に直ちにDelaunayのプログラムを再び実行し，小さい量について少なくとも1桁は高次まで計算した．1970年に計算機で打ち出したものと，1869年にDelaunayが手で作った表とを比較した結果，莫大な量の計算の中で彼の誤りはわずかに7個の係数だけであった．[1)]

19世紀の半ばよりずっと前には，摂動論の特殊な技法は導入されていなかったし，また後に手動式の卓上計算機が使えるようになるまでは，ほとんど実用的なものではなかった．(最も早く導入されたものではないが)最も簡単なのは**Crowellの方法**として知られている．その方法は，n個の相互作用している物体に対するNewtonの運動方程式を直接に数値積分するということを含んでいる．非常にしばしば直交座標が使用されるが，極座標を使うこともできる．摂動のない運動について前もって得られた知識は利用されないことに注意しよう．それに対して**Enckeの方法**では，運動方程式を摂動のない場合との座標の差を用いて表わす．これらの差は，少なくともはじめのうちは小さいから，数

1) コンピュータに数値計算でない代数的計算をやらせる分野は近年発展してきており，数式処理と呼ばれている．例えば，佐々木，後藤，日本物理学会誌，第35巻，第2号，p.99(1980)およびR.パベル，M.ロススタイン，J.フィッチ，サイエンス，1982年2月号を参照せよ．そこには，Delaunayの仕事に関するDepritたちの検算にも触れられている．

値積分において多くの時間のステップをとることができる．しかし時間がたつと，特に永年効果がある場合にはその差は大きくなる．ある時間間隔の後に，基準の軌道を例えば新しい接触軌道に修正し，また時間の経過と共に適当な付加的な修正を行う．Crowellの方法の方がより直接的なので，Enckeの方法よりもコンピューターでの操作にはより適している．ただし，例えば惑星間を宇
p.530 宙船で渡るような，軌道上のわずかな周期だけを扱う場合には選び方が問題になる．数値積分の技法は今では大いに発達し，一般的摂動論では極めて困難なことの1つである結果について誤差の限界を与えるということも，しばしば可能になっている．

他方，運動方程式の数値解は，その運動の長期間にわたる安定性の問題を解決することはできない．18世紀の初頭以来ずっと，天文学者達は太陽系の安定性の問題を議論してきた．万有引力の下における惑星の有界な運動は，限りなく続くのであろうか，それとも摂動によって遂には惑星同志の衝突や，いくつかの惑星の太陽系からの脱出が起こるのであろうか．おそらくこのことが初期の頃の摂動法の発見者達に，永年項に対するとりつかれたような興味を抱かせたのであろう．永年項を確定し，もしできれば永年項を取り除くために考え得るすべてのことがなされた．もしも，例えば半長軸に対して永年項が示されれば，そのときの結論は，惑星が太陽系から脱出するか太陽に落ち込むかのいずれかであろう．早い時期に，1次の摂動ではそのような項はないことが示され，人々は一安心した．しかしながら，高次の摂動計算によって，その問題がむしかえされることになった．展開に用いられた多重周期Fourier級数が半収束であるということが，Poincaréによって示されたために，結論については残念ながら“証明なし”ということになったのである．

ほんの数10年前になってはじめて，安定性の問題に対して，新しい（そして非常に抽象的な）数学的手法の適用によって新しい光が当てられたのである．微分位相幾何学（differential topology）の方法が，位相空間における可能な軌道の大局的な振舞を調べるために用いられた．C. L. Siegel, A. N. Kolmogorov，V. I. ArnoldおよびJ. Moserの名前と結びついた一連の研究によって，n個の物体から成り，万有引力だけで相互作用している系に対しては，安

定で有界な運動が可能であるということが示されたのである．すなわち，軌道の無視できない割合が（すなわち有限な測度の部分が）位相空間の特定な領域に限定され，準周期的（quasi-periodic）運動の状態ではずっとそこに留まっているのである.* その成功の見事さ，および新しい方法の威力の方が，特定の結果よりもおそらく大きな意義をもつであろう．というのは，太陽系の最終的な運命は，散逸力やその他の万有引力以外の力によって決定されるように思われるからである．

p. 531

11－7　断熱不変量 (Adiabatic Invariants)

1911年に開かれた第1回のSolvay会議では，物理学に量子の概念を導入する問題が議論されたが，またおやと思うほど単純な古典力学の問題も提起された．天井にある小さい穴を通して下っているひもにつけられたおもりが，平面振子のように振動している場合を考えよう．ここでひもがゆっくりと引き上げられるか，おろされるとしよう．ただし非常にゆっくりと行われるので，振動の1周期の間では，振子の長さはほとんど変わらないとしよう．このような過程で振動数はどうなるであろうか．振子のエネルギーは保存されないことに注意しよう．なぜなら，ひもの長さは変わるので，系に対して仕事がなされる（あるいは取り出される）からである．初等的な方法で，ひもの長さが非常にゆっくり変わる場合にはE/νが一定であることが示された.** この比はまさに作用変数Jであることが認められるであろう．パラメーターのゆっくりした変化の下で

---

*）統計力学が成立するためには，ほとんど正反対の結果が好ましいということは奇妙である．というのは，ある1つの系の統計的振舞を表現するものとしてのアンサンブル（集合）の概念が正しいためには，系の代表点は結局は，はじめの巨視的な性質，例えばエネルギーと矛盾しない，位相空間のすべての領域を動きまわるであろうということを示したいわけである．位相空間の軌道は可能な位相空間の領域をエルゴード的に埋めつくさなければならない．注目すべきことは，可能な運動についてのトポロジー的な解析は，すべての人達を幸福にするという形で問題を結着させたということである．すでに述べたように，有限な測度をもつ集合である**いくつかの**軌道は限りなく準周期的な運動を続けるのである．しかし，圧倒的に多くの初期条件は，エルゴード的な運動，すなわち，位相空間のすべての可能な領域を動き回り，任意の与えられた点にいつかは望むだけ近づくような運動に導くのである．

**）1911年のSolvay会議の少なくとも1つの報告によれば（Abhandungen der Deutschen Bunsen-Gesellschaft, No. 7, 1914, p. 364），Lorentzは以前にその問題をEinsteinに提案したといっている．Einsteinは，振子のエネルギーが，その長さが連続的かつ無限にゆっくりと変えられるならば，νに比例するということを証明したと返事をした．

の作用変数の**断熱不変性**（*adiabatic invariance*）は，量子力学を発展させている物理学者達にとっては，大いに満足すべき性質であった．前述のように（694 ページ），初期の処方は，原子系の特定の状態を表わすために，作用変数の値を量子化することを含んでいた．原子の周囲の様子，例えばそのまわりの電磁場のゆっくりとした変化は，状態間の遷移を引きおこさないということは良く知られていたので，Jの断熱不変性は好都合なことであった．

断熱不変性を調べることのもともとの動機はもはや重要ではないが，最近になってその問題に対する関心が大きく復活してきている．実際の応用が，プラズマ物理学，核融合の技術，荷電粒子の加速器，銀河系の天文学において行われている．これらのことについての研究は目下進行中であって，最終的なことはまだいえない．ここでできることは，いくつかの基本的な考察を示し，進行中の研究の傾向を簡単に説明することだけである．簡単のために，1自由度の周期的な系についてだけ考えよう．多くの自由度の場合への拡張は，通常は（縮退がない場合は）困難ではない．大要は，1917 年に Burgers によって与えられた方法である．

パラメーター a を含む1自由度の系を考えよう．この方法では，暗に，系ははじめは一定の a を持つ保存系であるという描象が用いられる．次に a の時間依存性が“スイッチを入れ”られ，長時間にわたって a はゆっくりと変わり，最終的にはある一定の値に戻って行く．a が一定のときには運動は周期的であり，パラメーターがゆっくり変化しているときには，運動の周期的性質は変わらない．運動の変化は，任意の1周期では小さいが，長い時間が経てば運動の
p. 532
性質は大きな定性的な変化をするかも知れない．このように，時間依存性を入れることは小さい摂動の性質を持っている．そこで，運動の永年変化を探ろう．

パラメーター a が一定ならば，系はそのハミルトニアンが $H = H(J_0, a)$ であるような，作用-角変数 (w_0, J_0) で記述されるであろう．これらの変数は，はじめの正準変数の組 (q, p) から母関数 $W^*(q, w_0, a)$ によって導かれると考えるのが実際的である．通常の Hamilton-Jacobi の方程式は，もちろん $W(q, J_0, a)$ の形の母関数に導くが，2つの母関数は一般に，

$$W^*(q, w_0, a) = W(q, J_0, a) - J_0 w_0 \qquad (11-109)$$

で与えられるLegendre変換((9－24)式参照)によって関係づけられている．aが時間的に変化することが許される場合には，(w_0, J_0)は正準変数としてもちろん有効であるが，母関数はaの時間依存性を通じて時間の陽な関数となる．したがって，(w_0, J_0)の組に対して適切なハミルトニアンは，

$$K(w_0, J_0, a) = H(J_0, a) + \frac{\partial W^*}{\partial t}$$

$$= H(J_0, a) + \dot{a}\frac{\partial W^*}{\partial a}, \qquad (11-110)$$

となる．いまやJ_0はもはや定数ではなく，w_0は時間と共に1次的には変わらない．実質的に，ハミルトニアンの第2項は，定数変化の方法の場合と同じく，摂動ハミルトニアンであり，J_0の時間依存性は，運動方程式，

$$\dot{J}_0 = -\frac{\partial K}{\partial w_0} = -\dot{a}\frac{\partial}{\partial w_0}\left(\frac{\partial W^*}{\partial a}\right), \qquad (11-111)$$

によって定められる．ここで括孤の中の導関数は，もちろんKと同様にJ_0, w_0, aを用いて表わされる．1次の摂動論の精神に従って，永年項，すなわち**適当な$\boldsymbol{a}$の値に対する**摂動のないときの運動の1周期にわたる$\dot{J}_0$の平均値を求めよう．aはゆっくり変化するので，この時間間隔では一定とすることができ，平均値は

$$\bar{\dot{J}}_0 = -\frac{1}{\tau}\int_\tau \dot{a}\frac{\partial}{\partial w_0}\left(\frac{\partial W^*}{\partial a}\right)dt$$

$$= -\frac{\dot{a}}{\tau}\int_\tau \frac{\partial}{\partial w_0}\left(\frac{\partial W^*}{\partial a}\right)dt + O(\dot{a}^2, \ddot{a}), \qquad (11-112)$$

と書くことができる．(10－13′)式から，Wは不定積分，

$$W = \int p\,dq\,,$$

によって与えられるということを思い出そう．したがってw_0の1周期では，母関数WはJ_0だけ増加する．w_0が1だけ増加するから，$J_0 w_0$も同時にJ_0だけ増

加する．したがって（11－109）式によって，W^*はw_0の周期関数であり，W^*お
p. 533
よびそのaに関する導関数は共にFourier級数で表わされる．

$$\frac{\partial W^*}{\partial a} = \sum_k A_k(J_0, a)\, e^{2\pi i k w_0}. \qquad (11-113)$$

したがって，平均値$\overline{\dot{J}_0}$は，

$$\overline{\dot{J}_0} = -\frac{\dot{a}}{\tau}\int_{\tau} \sum_{k \neq 0} 2\pi i k A_k(J_0, a) e^{2\pi i k w_0}\, dt + O(\dot{a}^2, \ddot{a}),$$

の形になる．被積分関数は定数項を含まないから，積分は零となる．

$$\overline{\dot{J}_0} = 0 + O(\dot{a}^2, \ddot{a}). \qquad (11-114)$$

そして$\overline{\dot{J}_0}$は$\dot{a}$の1次では永年変化はなく，よって断熱不変性という求めていた性質が証明された．

この導出の仕方がどうなるのかを調和振動子の問題で詳しく見てみよう．ハミルトニアンは，

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2),$$

で与えられる．ここでωは時間の陽な関数であってよい．(q, p)の組から(w_0, J_0)の組への正準変換の式は，（10－78）および（10－79）式で与えられるが，W^*を計算し易い形に書くと，

$$\left.\begin{aligned} J_0 &= \pi m\omega q^2 \csc^2 2\pi w_0 = -\frac{\partial W^*}{\partial w_0}, \\ p &= m\omega q \cot 2\pi w_0 = \frac{\partial W^*}{\partial q}, \end{aligned}\right\} \qquad (11-115)$$

となる．定数（したがって問題にならない）項を除けば，W^*は（11－115）式を積分して得られ，

$$W^*(q, w_0, \omega) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot 2\pi w_0, \qquad (11-116)$$

となる．ωに関する導関数は，

$$\frac{\partial W^*}{\partial \omega} = \frac{mq^2}{2} \cot 2\pi w_0,$$

となるが，(10－78)式を用いて w_0, J_0 および ω の関数として表わすと，

$$\frac{\partial W^*}{\partial \omega} = \frac{J_0}{4\pi\omega}\sin 4\pi w_0. \tag{11-117}$$

となる．このようにして，$\dot{J}_0$ は1つの項のみのFourier 展開，

$$\dot{J}_0 = -\frac{\dot{\omega}}{\omega}J_0\cos 4\pi w_0, \tag{11-118}$$

p. 534
によって与えられる．これは予言されたように定数項を含まない．この段階までは(11－118)式は厳密である．同様に，w_0と時間の間の厳密な関係が，w_0 に対する運動方程式から決められて，

$$\dot{w}_0 = \frac{\partial K}{\partial J_0} = \frac{\partial H}{\partial J_0} + \dot{\omega}\frac{\partial}{\partial J_0}\left(\frac{\partial W^*}{\partial \omega}\right)$$
$$= \frac{\omega}{2\pi} + \frac{\dot{\omega}}{4\pi\omega}\sin 4\pi w_0, \tag{11-119}$$

となる．

少なくとも最初の補正項を含むように，$\dot{J}_0$の1周期にわたる平均値を計算するために，近似をはじめることにしよう．まず，摂動を受けた運動の特定の1周期にわたって，比，

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} \equiv \epsilon, \tag{11-120}$$

は一定で，$\epsilon\tau \ll 1$ であると仮定しよう．(11－120)式は，

$$\omega = \omega_0 e^{\epsilon t} \approx \omega_0(1 + \epsilon t), \tag{11-121}$$

のような変化の仕方に対応している．ここで t は，$\omega(0) = \omega_0$となるような，考えている周期のはじめから測られる．そうすると，(11－119)式は次のようになる．

$$\dot{w}_0 = \frac{\omega}{2\pi} + \frac{\epsilon}{4\pi}\sin 4\pi w_0\ . \tag{11-119'}$$

第零次の解は，

$$2\pi w_0^{(0)} = \omega_0 t,$$

となる．ここで定数項は，初期位相を適当に選ぶことによって零となるようにした．ϵ の1次まででは，(11－119′) 式は，

$$\dot{w}_0^{(1)} = \frac{\omega_0(1 + \epsilon t)}{2\pi} + \frac{\epsilon}{4\pi}\sin 2\omega_0 t, \tag{11－122}$$

となり，その解は，

$$2\pi w_0^{(1)} = \omega_0 t + \frac{\epsilon}{2}\left[\omega_0 t^2 + \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2\omega_0}\right], \tag{11－123}$$

となる．これに対応して，ϵ の2次まで正しい j_0 に対する方程式は，

$$\frac{d\ln J_0}{dt} = -\epsilon\cos\left(2\omega_0 t + \epsilon\left\{\omega_0 t^2 + \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2\omega_0}\right\}\right),$$

と書くことができる．cosineを展開し，ϵ についての項を1次の微小量として取り扱うと，導関数は，

$$\frac{d\ln J_0}{dt} = -\epsilon\cos 2\omega_0 t + \epsilon^2\left\{\omega_0 t^2 + \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2\omega_0}\right\}\sin 2\omega_0 t,$$

p.535
と書き直せる．永年的振舞いを見出すために，この方程式を運動の周期，ここでは $t = 0$ から $\tau = 2\pi/\omega_0$ まで，にわたって平均をとる．そうすると，中括弧の中の t^2 を含む第1項を除いては，右辺のほとんどの項は落ちて，最終的な結果は，

$$\overline{\frac{d\ln J}{dt}} = \frac{\pi\epsilon^2}{\omega_0} = \frac{\omega_0\delta^2}{4\pi}, \tag{11－124}$$

となる．ここで $\delta = \epsilon\tau$，すなわち δ は周期 τ の間の ω の変化の割合である．これに対応する1周期当りの J の永年変化の割合は次式で与えられる．

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{\delta^2}{2}\,. \tag{11－125}$$

もっと一般的な考察から予想されたように，作用変数の永年変化には，ϵ の1次の項は現われない．$\epsilon^2 = (\dot{\omega}/\omega)^2$ のオーダーの量を残してはじめて，零とならない J の長時間的な変化が見出せるのである．

作用変数の断熱不変性は，電磁場中の荷電粒子の運動などへの応用において特に有用であることが示されている．最も簡単でかつ重要な実際的な結果を持

つ例の１つは，一様な（あるいはほとんど一様な）一定の磁場の中での電子の運動に関するものである．良く知られているように，そのような場合には荷電粒子は磁力線のまわりに円運動をする．このことは，Newtonの運動方程式を用いて，最も基本的な段階から示すことができる．一定な磁束密度 **B** による Lorentz 力は $(\mathbf{v} \times q\mathbf{B}/c)$ であるから，運動方程式（１－４）は，

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \frac{q\mathbf{B}}{mc}, \tag{11-126}$$

である．（11－126）式から速度ベクトル **v** は大きさは変わらず，角振動数，

$$\boldsymbol{\omega}_c = -\frac{qB}{mc}, \tag{11-127}$$

で磁場の方向のまわりに回転するということがいえる．ラグランジアンを用いる方法でも，同等な導出が定式化できる．第５－９節で，この場合のラグランジアンは，

$$L = \frac{mv^2}{2} + \mathbf{M}\cdot\mathbf{B}, \tag{11-128}$$

と書けることが示された．ここで **M** は粒子の運動に伴う磁気モーメントで，角運動量 **L** を用いて，

$$\mathbf{M} = \frac{q\mathbf{L}}{2mc}, \tag{11-129}$$

p. 536
によって定義される（（５－108）式参照）．z 軸を **B** の方向にとった円筒座標を用いると，**M** の **B** に平行な成分は，

$$M_z = \frac{qr^2\dot{\theta}}{2c}, \tag{11-130}$$

であり，ラグランジアンは，

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q}{2c}Br^2\dot{\theta}, \tag{11-131}$$

となる．θ はラグランジアンのサイクリック座標だから，対応する正準運動量 p_θ，

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} + \frac{qBr^2}{2c}, \tag{11-132}$$

は運動の定数である．さらに，動径方向の運動方程式は，

$$m\ddot{r} - r\dot{\theta}\left(m\dot{\theta} + \frac{qB}{c}\right) = 0\,, \tag{11-133}$$

となる．方程式（11－132）および（11－133）の定常解は，r および $\dot{\theta}$ が一定の場合に対応し，$\dot{\theta}$ の値は，

$$\dot{\theta} = \omega_c \equiv -\frac{qB}{mc}, \tag{11-134}$$

となり，（11－127）式と一致する*. このような場合には，$p_\theta = -(qBr^2/2c)$ であり，θ に対応する作用変数は，

$$J_\theta = \oint p_\theta\, d\theta = -\frac{\pi q B r^2}{c}\,, \tag{11-135}$$

である．（11－130）式から，

$$\frac{qr^2}{c} = \frac{2M}{\omega_c} \tag{11-136}$$

と書け（この運動では M_z は M に等しい），したがって J_θ は，

$$J_\theta = -\frac{2\pi MB}{\omega_c} = \frac{2\pi mc}{q}M\,, \tag{11-135'}$$

と書くこともできる．断熱不変性の定理は，磁場の変化が十分ゆっくりであるならば，J_θ は一定のままであることを意味している．（11－135′）式は，磁気モ
p. 537
ーメントも同様に断熱不変であることを述べている．（11－135）式に基づいて言い換えれば，B と軌道の面積との積（すなわち，軌道を貫く力線の数）は一定であるということになる．

もし，磁場の状態が時間的には変わらないけれども，わずかに一様性が乱れているならば，B の断熱的な変化が生じるであろう．このときにもし粒子が速度の小さい z 成分を持てば，その結果粒子は異なる B の領域にゆっくりと移っ

---

*) 角振動数 ω_c はサイクロトロン周波数（cyclotron frequency）とか，ジャイロ振動数（gyration frequency）とか種々の呼び方があるが，それは Larmor 振動数（5－104）式の2倍の大きさを持っている．もちろん，Larmor の定理はこの場合には適用できない．なぜなら，力線のまわりの回転の運動エネルギーは，少なくとも他の運動エネルギーと同程度の大きさであり，B について2次の項が無視できないからである．

て行くであろう.（11－134),（11－135）および（11－135′）式から，磁力線Bのまわりの運動の運動エネルギーは，容易に導かれるように，

$$T_{(\theta)}=\frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2}=MB, \qquad (11-137)$$

である. 粒子がBの増加する方向へ移って行くとしよう. そうすると（11－137）式によって，回転の運動エネルギーは増加する. 全運動エネルギーは保存されるから，磁力線に沿った縦方向（longitudinal）の移動の運動エネルギーは減少しなければならない. 遂には移動速度は零となって，運動は向きを変える. もし，反対方向にもBがいつかは増加するように調整できれば，荷電粒子は閉じこめられたままで，2つの端の間を往復するであろう――いわゆる磁気鏡による閉じ込め（mirror confinement）の原理である. 完全な議論はもっと複雑であるが，Mの断熱不変性の意義は明瞭に示されている.

定常状態あるいは定常運動のまわりのほとんどすべての微小振動の現象は，調和振動子によって記述されるということを思い出そう. その結果，ゆっくりしてはいるが，しかしあまりゆっくりではない，パラメーターの変化の下での調和振動子に対するJの不変性に関する問題に，非常に多くの実際的な興味が寄せられている. 例えば，荷電粒子の加速器における振動は多くの新しい洞察に導いた. さらに，数学者がこの問題をとり上げて，時間に依存する係数を持つ微分方程式の解についての知識を増加させた. これらの最近の研究の成果は多すぎて，ここでは詳しい報告はできないし，ましてそれらを導くことはできない. しかし，調和振動子の問題で，特に興味のある2つの性質について述べておくことにしよう.

ϵを小さいパラメーターとして，通常，時間変数として$t'=\epsilon t$が導入される. “摂動”ハミルトニアンにでてくるωの時間微分は，このとき，

$$\dot{\omega}=\epsilon\frac{d\omega}{dt'},$$

のようになる. そしてt'に関するωの微分は$\omega(t')$という変化が，固定された“プログラム”によって与えられるものとして取り扱い，このプログラムが実行される時間の尺度がϵの値に従って変わるとするのである. このようにして，

１個のパラメーターが，ω がゆっくり変わるか急速に変わるかを表わすことになる．プログラムは，（$t'=-\infty$ において）初期の定数値からはじまり（$t'=+\infty$ において）他のある定数値で終るようなものであるとしよう．次に，J の運動の１周期における変化ではなく，J の初期値から最終値への変化を求めるp.538のである．その結果は，驚ろくべきことに，$\omega(t')$ が十分良い振舞をする関数であるならば，その変化は（11－125）式から予想されるものよりもずっと小さいのである．$\omega(t')$ が実関数で有界でありかつ実軸上およびその付近で解析的であれば，J の変化は指数関数的に小さいということ，すなわち，

$$\frac{J(+\infty)-J(-\infty)}{J(+\infty)}\propto O(e^{-d/\epsilon}), \qquad (11-138)$$

となることが証明されている*．ただし d は複素 t' 平面において解析的である領域の幅に関係した正の数である．

より興味ある結果は，時間に依存する振動数をもつ調和振動子は，その変化が遅くなった極限では作用変数 J に帰着するような厳密な不変量を持っている，ということである．ラグランジアンおよびハミルトニアンが，

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2-\omega^2(t)x^2);$$
$$H=\frac{1}{2m}(p^2+m^2\omega^2(t)x^2), \qquad (11-139)$$

で与えられる線形調和振動子に対しては，不変量は通常，

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{r^2}+(r\dot{x}-x\dot{r})^2\right], \qquad (11-140)$$

のように書くことができる．ここで $r(t)$ は，微分方程式，

$$\ddot{r}+\omega^2(t)r-r^{-3}=0, \qquad (11-141)$$

を満足する関数である．I の不変性の形式的な数学的導出はかなり長くなるが，I の物理的意味――およびそれがなぜ定数であるかということ――は簡単な考

*）いくつかの参考文献を挙げることができるが，最もわかり易いのはおそらく，R. E. Meyer, *Jour. Applied Math. and Phys.*（JAMP）**24**, 239（1973）であろう．

察から明らかにできる．一定のωを持つ線形調和振動子の運動は，例えば平面上の等方調和振動子のx成分とみなすことができる．この関係は，ωが時間に依存するときでもまったく変わらない．そこで，中心力の時間に依存するポテンシャル，

$$V=\frac{m}{2}\omega^2(t)r^2,$$

を考えよう．ラグランジアンは，

$$\begin{aligned}L&=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\theta^2-\omega^2(t)r^2)\\&=\frac{m}{2}[(\dot x^2-\omega^2x^2)+(\dot y^2-\omega^2y^2)],\end{aligned}\qquad(11-142)$$

となる．直交座標では，問題は（11－139）式の形の2つの独立な線形調和振動子の問題に分離される．平面極座標を用いると，Lはθについてサイクリックであることがわかるから，角運動量は依然として保存され，1つの運動方程式は，新しい定数hを導入して，

p. 539

$$r^2\dot\theta=\frac{l}{m}\equiv h,\qquad(11-143)$$

に帰着される．したがって，線形調和振動子はやはり，単位質量当りの角運動量がhで表わされるような一定の値である，平面上の等方調和振動子のx軸上への射影と考えることができる．動径方向の運動方程式は，（11－142）式から，

$$m\ddot r+m\omega^2r-mr\dot\theta^2=0,$$

となる．あるいは，（11－143）式を考慮すると，

$$\ddot r+\omega^2r-\frac{h^2}{r^3}=0,\qquad(11-144)$$

となる．hが保存されるということを用いると，

$$I'=\frac{1}{2}\left[\frac{h^2x^2}{r^2}+(r\dot x-x\dot r)^2\right],\qquad(11-145)$$

によって定義される運動の定数を作ることができる，定数I'の形を求めるために，$x=r\cos\theta$を用いて，

$$r\dot{x} - x\dot{r} = -h\sin\theta,$$

となることに注意しよう．そうすると，

$$I' = \frac{h^2}{2},$$

となる．

さて，yの初期値およびxとyの間の相対的位相の初期値を任意に選んで，hの数値を１にすることは常に可能である．例えば，時間のはじめにはωは一定値ω_0であり，したがってxおよびyは，$x = x_0 \sin \omega_0 t$ および $y = y_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$のように時間に依存するとしよう．そうすると，$h$の定義によって，

$$h = x\dot{y} - y\dot{x} = \omega_0 x_0 y_0 \cos\alpha,$$

となる．その後ωが時間的に変化しても，hはもちろんその初期値を保つであろうし，その値はy_0およびαを適当に選べば，x_0の値が何であっても１にとることができる．このようにして，任意の時間に依存する線形調和振動子に，$h = 1$となるような平面等方調和振動子を対応させることが常に可能である．この付随した問題に対しては，動径方向の運動方程式（11－144）は（11－141）式に帰着し，I'は$h = 1$であるから正に不変量（11－140）式に帰着される．物理的にいえば，（11－140）式のIの厳密な不変性は，付随した平面等方調和振動子の問題における角運動量の保存を述べているにすぎない*．IとJの関係を考察することだけが残った問題である．もしもωが定数ならば，動径方向の方程式の解は，rが一定値$\omega^{-1/2}$であるというものである（付随した平面問題の運動は円運動である）．このときは$\dot{r}$が零だから，（11－140）式の量Iは，

$$I = \frac{1}{2\omega}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{E}{m\omega} = \frac{J}{2\pi m},$$

---

*）時間に依存する線形調和振動子に対するIの厳密な不変性を，それに関連した量が一定であるということは加速器の理論では以前から見出されていたけれども，明確な形ではじめて述べたのは，H. R. Lewis, Jr., *Jour. Math. Phys.* **9**, 1976（1973）であった．付随する平面振動子との関係が明白に述べられたのは，Eliezer and Gray, SIAM J. Appl. Math. **30**, 463（1976）においてであった．

となる．したがって，第零近似では厳密な不変量は，期待されたように作用変数 J に比例する．

ここでは，断熱不変量というテーマの特に興味を引く部分をスケッチすることしかできなかった．この分野の支流は，古典および量子力学，現代数学の多くの領域に入り込んでいる．詳細はこの章の参考文献でたどることができるであろう．断熱不変量の基礎理論およびその応用は，将来さらに発展するものと確かに期待される．

参 考 書

M. Born, *Mechanics of the Atom.* 古典力学における摂動論は，興味が，物理学，天体力学，宇宙船の飛行，あるいは現代数学のいずれにあるかに従って，幾分異なった面を持っている．最近まで物理学の教科書は，Bornの教科書に極めて密接に従う傾向があった．Bornの教科書そのものは，“古い”量子力学の発展の結果として書かれたものである．Bornの議論は，主として時間に依存しない摂動論に関するものであるが，その基本は彼の書物の第4章の中に見出され，その他種々の断片的な事柄が書物の全体にわたって見られる．

E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics.* この参考文献は，Bornの線に沿った，より改善された解説として引用される．時間に依存しない摂動論だけが述べられている．主として調和振動子に関連したいくつかの例が詳細に考察されている．断熱不変量に関する短かい節もある．

J. M. A. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics.* KeplerおよびNewtonの大部分の段階を過ぎてしまえば，天体力学はそのほとんどすべてが摂動論と3体問題から成り立っている．それゆえ，天体力学における摂動論の文献は，天体力学そのものについての文献と共存しており，どのような引用も極めて選択的にならざるを得ない．Danbyの教科書は，摂動論の古典版とでもいうべきものと，その現代的な応用を含んだ比較的最近（1962年）の解説である．この書物は，一般には公式で埋めつくされそうな分野が，異常なほどわかり易く，また包括的であって，注釈のつけられた参考文献一覧もある．von Zeipelの方法については述べられておらず，またLie級数を使う方法のような，より現代的な発展にも触れてはいない．

p. 541
B. Garfinkel, *Lagrange–Hamilton–Jacobi Mechanics*, in *Space Mechanics, Part 1*, ed. by J. B. Rosser. この論文の簡潔で高い密度でつめこまれた10ページには，天体力学

の専門家によってまとめられた摂動論が述べられている．正準変換論およびHamilton-Jacobiの方程式の知識を前提として，定数変化法からvon Zeipelの方法までを息もつかずに見渡している．望むことのすべてが含まれているといってもよいであろう．

Y. HAGIHARA, *Celestial Mechanics, Vol. 2: Perturbation Theory*（２部から成る）． 対照的に，この文献は，摂動論の天体力学への応用を徹底的にかつ詳細にカバーしており，およそ900ページを要している．現在発展中の研究の文献および歴史的文献についての一覧は，ほぼ完全と思われる．天体力学の問題を解くために，摂動の方法を用いて実際にどのようなことがなされたか，を探そうと思ったら，この書物を見るべきであろう．ただし，言葉で書かれた部分は（どのように書かれていても）所々理解し難い場合がある．von Zeipelの方法のLie級数を用いた再定式化は，この巻にあるが，安定性の理論への現代的アプローチは他の巻に収められている．

R. DEUTSCH, *Orbital Dynamics of Space Vehicles.* 宇宙技術が，天体力学とは異なった古典力学の領域を与えるかどうかは，議論のある所であろう．多分，分けるとすれば“宇宙力学”はコンピューターを口にくわえて生まれてきたということに注目することであろう．この書物は，大部分が天体力学の教科書のように見え，その限りでは良い書物である．種々の摂動論の方法が詳細に述べられており，Hansenの方法のような特殊化されたものも含まれている．しかしながら，応用はほとんど，例えば人工衛星の軌道の摂動のような，宇宙技術に由来するものである．

G. E. O. GIACAGLIA, *Perturbation Methods in Non-Linear Systems.* この書物はおそらく，摂動論の現代的発展——PoincaréおよびLindstedtからArnoldおよびMoserに到る——のまとめとしては，読み易く理解し易い形にまとめられた最良のものであろう．立場は，基本的には応用数学者としてのものである．書物は灰色がかったタイプ原稿の再生版で，生理的には読みにくい．

R. ABRAHAM AND E. MARSDEN, *Foundations of Mechanics.* 力学の発展および解説に新しい言葉が使われている——すなわち微分位相幾何学という言葉である．新参の物理学者は，著者の意見を理解するためには，新しい言葉についての集中的な課程を受ける必要がある．摂動を受けた運動の全体としての安定性に関する領域では，新しい言葉は他の方法では達し得ない，注目すべき成果を収めたように思われる．しかしながら，力学のより普通の領域を解説するのに利点があるかどうかは極めて疑わしい．このような新しい水の中で泳ぎたい人達には，この新しく改訂された書物は，ほぼ百科辞典といえる程広範囲のことを取り扱っている．156ページ位が微分位相幾何学および多様体についての準備を与えているが，それに対しても抽象数学の方法に対する入門指導が必要である．天体力学に対する応用が，第Ⅳ部（pp. 619－704）を形成している．

J. MOSER, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems.* この短かい書物は，1972年に行われた5つの講義のテキストを再録したものである．Moser自身，安定性の問題の現代的取り扱いを発展させるのに大いに寄与してきた．彼はここで，今世紀における天体力学に力点をおいた発展の概観を与えている．定理はしばしば証明なしで述べられており，読者にはかなりの数学の素養が期待されている．それにもかかわらず，この書物は，新しい技法の特質と成功を伝えるという点で，AbrahamとMarsdenよりも成功を収めている．

T. G. NORTHROP, *The Adiabatic Motion of Charged Particles.* 1960年のはじめ以降の発展は，ここには当然見出すことはできないが，この簡潔な単行本は断熱不変量に基づ
p. 542 く複雑な計算に対する良い入門を与えている．応用は，例えば磁気鏡装置等のプラズマ“装置”に関するものである．

B. LEHNERT, *Dynamics of Charged Particles.* この書物は上のものとほぼ同じ時期のものであるが，同じ領域の問題について幾分か長い議論が与えられている．断熱不変量とは関係のない，例えば荷電粒子からの輻射のような，プラズマ装置に関連した議論もなされている．

演 習 問 題

1. 時間に依存する摂動論の方法によって，線形調和振動子（ポテンシャルを自由粒子に対する摂動と考えた場合）の解を3次まで求めよ．ただし，初期条件は$\beta_0=0$とする．xおよびpの両方に対して，時間の関数としての式を求め，それらが通常の調和振動子の解を展開したときの項と一致することを示せ．

2. 質点mが，Hookeの法則に従う，力の定数がkの，鉛直につり下げられたばねの一端にとりつけられている．ばねの他端は，$z_1=a\cos\omega_1 t$に従って，上下に振動させられている．aを小さい量として取り扱うことによって，定数変化の方法を用いて，mの時間的運動の1次の解を求めよ．ω_1が摂動のないときの振動数ω_0に近づくとどうなるか？

3. *a*）力の定数がkである線形調和振動子の質量が，割合にしてϵだけ突然に増加したとする．時間に依存しない1次の摂動論によって，その結果生じる振動子の振動数のずれをϵの1次まで求めよ．同じオーダーまででは，結果はずれに対する厳密な予言と一致することを示せ．

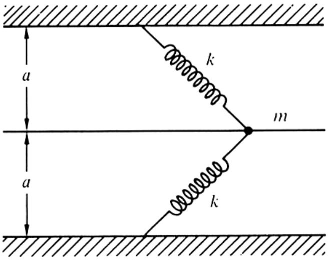
b）（*a*）を，kの値を割合にしてϵだけ増加した場合に対して繰り返えせ．

4. 第11－4節において，時間に依存しない形の1次の摂動論を用いて，有限の振幅の平面振子の周期に対する効果が求められた．同じ定式化に従って，（11－72）式を使っ

て θ の時間依存性の１次の補正を求めよ（J_0はいまや時間の関数になっていることを思い出せ）.

5. 有限な振幅をもつ結果としての平面振子の振動数の補正を，２次の摂動まで矛盾のないように計算を実行せよ（ただし，どの方法を選んでもよい）. λ^2のオーダーのすべての項が，ハミルトニアンの中および摂動の取り扱いの中で残されなければならない.

6. 図に示されているように，質点が直線上を動くように拘束され，力の定数が等しい



p. 543
２つの理想的なばねの端に結ばれている. 各々のばねの自然長 b は $b \leq a$ である. １次の摂動論によって，有限振幅の振動の振動数に対する最低次の補正を求めよ. a の大きさが b に近づくとどうなるか？

7. *a*） 補正項の最低次では，１次元の調和振動子に対する相対論的（しかし共変的でない）ハミルトニアンは，

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2) - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2} ,$$

の形になることを示せ.

b） １次の摂動論によって調和振動子の振動数に対する最低次の相対論的補正を計算せよ. 結果を，振動数の変化の割合に対する式で表わせ.

8. 平面等方調和振動子が，ハミルトニアンにおける，

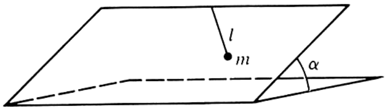
$$\epsilon H_1 = p_x^2 p_y^2 ,$$

の形の変化によって表わされる摂動を受けたとする. 時間に依存しない１次の摂動論を用いて，振動数のずれを求めよ.

9. 原子のStark効果のモデルは，平面内のKeplerの楕円軌道を考え，それがポテンシャル $\Delta V = -Kx$ によって摂動を受けるとして，作ることができる. １次の摂動論によれば，運動の振動数にはどのような変化が起こるか？ このモデルは，太陽の幅射圧の地球の衛星の軌道への影響に対する第１近似としても使うことができる.

10. 平面振子の長さ l を断熱的に変えるためになされる仕事を考えることによって，振幅が零となる極限においては，平面振子に対して J が断熱不変量であることを初等的な方法で証明せよ．

11. 図に示されているように，小さな振幅の平面振子が斜面上を動くように拘束されている．斜面の傾角 α がゆっくり変わるとき，その振幅はどのように変わるか．



12. 第10章の演習問題13に述べられている系を考えよう．パラメーター F がその初期値からゆっくりと変わると仮定しよう．粒子のエネルギーはどうなるか？ また振動の振幅，周期はどうなるか？

13. a）

$$Q = -\arctan\left[\frac{r}{x}\phi(p, x)\right],$$

$$P = \frac{m}{2}\left[\frac{x^2}{r^2} + \phi^2(p, x)\right] = \frac{mI}{2},$$

なる変換は正準変換であることを示せ．ただし r は（ここまででは）t の任意の関数であり，また，

$$\phi(p, x) = \frac{rp}{m} - x\dot{r},$$

である．

p. 544

b） $F_1(q, Q, t)$ の型の母関数を求めよ．

c） もしこの正準変換を（11－139）式の時間に依存する調和振動子に適用し，$r(t)$ が（11－141）式を満足するとすれば，変換されたハミルトニアンは Q についてサイクリックであり，したがって P は運動の定数となることを示せ．このことは（11－140）式で定義される I の厳密な不変性の独立な証明にもなっている．

第12章　連続的な系および場に対するラグランジアン形式とハミルトニアン形式の序論

p. 545
これまで論じてきた力学の形式はすべて，有限個あるいは高々可付番無限個の自由度をもつ系を取り扱うために工夫されたものであった．しかし，例えば振動する弾性体のように，連続的な系を含む力学の問題がいくつかある．この場合には，連続体の各点が振動に関与し，その全体の運動を記述することは，すべての点の位置座標を指定することによってはじめて可能である．前章までに述べてきた力学の形式を，そのような問題が取り扱えるように修正することは困難ではない．最も直接的な方法は，連続的な系を不連続的な粒子からできている系で近似し，それから連続的な極限へ移行したときに，運動を記述する方程式が，どのように変化するかを調べることである．

12−1　不連続な系から連続的な系への移行

この方法を無限に長い弾性体の棒に適用しよう．この棒は，小さい縦振動，すなわち棒を作っている粒子の棒の軸に平行な振動的な変位を行うことができるものとする．連続的な棒を近似するために考えられた不連続な粒子からできている系は，等しい質量の質点が間隔 a で並び，それらの質点が力の定数 k をもつ質量のない一様なばねで連結されている無限に長い鎖である（12−1図参照）*. 質点は鎖に沿ってだけ動くことができると仮定する．この不連続な系は，第6章で述べた直線状高分子の拡張であることがわかるであろう．それゆえ，

*) ここでは，有限な長さの鎖ではなく無限に長い鎖を使うことにする．これは（不連続な場合には）例外的となる端の質点，または（連続的な場合には）境界条件に関する議論を避けるためである．

その運動を記述する方程式は，微小振動を取り扱う普通の方法によって得ることができる．i 番目の質点のつり合いの位置からの変位を η_i で表わすと，運動エネルギーは，

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m\dot{\eta}_i^2, \tag{12-1}$$

p.546
となる．ただし m は各質点の質量である．これに対応する位置エネルギーは，各々のばねがそのつり合いの長さよりも伸ばされたり縮められたりした結果と

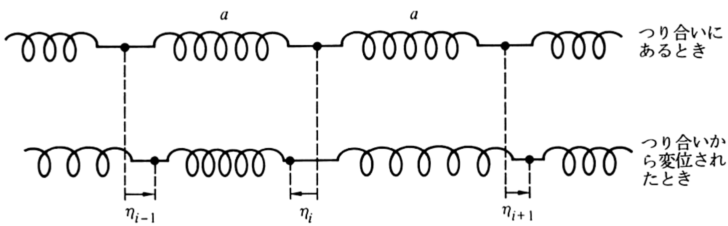


図 12－1
連続的な弾性の棒の近似として用いられる，ばねで結ばれた等しい質量の質点からなる不連続な系.

して生ずる位置エネルギーの和であって，

$$V = \frac{1}{2}\sum_i k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2, \tag{12-2}$$

である（第6－4節参照）.（12－1）式と（12－2）式を結びつけると，この系に対するラグランジアンは，

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_i (m\dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2), \tag{12-3}$$

となり，これはまた次のように書くこともできる.

$$L = \frac{1}{2}\sum_i a\left[\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2 - ka\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}\right)^2\right] = \sum_i aL_i, \tag{12-4}$$

ここで a はつり合いにあるときの質点間の距離である（図12－1参照）. この L から導かれる座標 η_i に対するLagrangeの運動方程式は，

$$\frac{m}{a}\ddot{\eta}_i - ka\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a^2}\right) + ka\left(\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a^2}\right) = 0\,, \qquad (12-5)$$

である．

（12－4）式におけるL，およびそれに対応する運動方程式の特別な形は，aを零に近づけて連続的な棒の極限に移るときに便利なように選んだものである．この極限では，m/aが連続的な棒の単位長さ当りの質量μに移ることは明らかであるが，kaの極限値が何になるかはそれほど明らかではない．Hookeの法則に従う弾性体の棒に対しては，**単位長さ当りの**棒の伸びが，棒に働らく力，あるいは張力に比例するということを思い出そう．その関係は，

$$F = Y\xi,$$

p. 547
と書くことができる．ここでξは単位長さ当りの伸び，YはYoung率である．ところで，不連続な系における長さaの単位長さ当りの伸びは$\xi = (\eta_{i+1}-\eta_i)/a$である．そして，ばねをこれだけ伸ばすのに必要な力は，

$$F = k(\eta_{i+1}-\eta_i) = ka\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}\right),$$

である．それゆえ，kaは棒のYoung率に対応しなければならない．不連続な場合から連続的な場合へ移るときには，特定の質点を示す整数の指標iは連続な位置座標xになり，変数η_iの代わりに$\eta(x)$が用いられる．さらに，L_iの中にでてくる量，

$$\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a} = \frac{\eta(x+a)-\eta(x)}{a}\,,$$

は，aが零に近づくときには，aがdxの役割を果たすから，明らかに極限値，

$$\frac{d\eta}{dx},$$

に近づく．最後に，不連続な質点の数についての和は，棒の長さxについての積分になり，ラグランジアン（12－4）式は，

$$L = \frac{1}{2}\int\left(\mu\dot{\eta}^2 - Y\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right)dx\,, \qquad (12-6)$$

の形になる．aが零に近づいた極限では，運動方程式（12－5）の最後の2つの項は，

$$\lim_{a\to 0} -\frac{Y}{a}\left\{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_x - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x-a}\right\},$$

となるが，これは明らかにηの2次の導関数を定義する式である．それゆえ，連続的な弾性体の棒に対する運動方程式は，

$$\mu\frac{d^2\eta}{dt^2} - Y\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0, \qquad (12-7)$$

となり，これは伝播速度，

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}, \qquad (12-8)$$

を持つ1次元のよく知られた波動方程式である．（12－8）式は縦波の弾性波に対する有名な公式である．

この簡単な例で，不連続な系から連続的な系へ移るときの著しい特徴が十分に示されている．最も重要なことは，位置座標xの演じる役割を理解することである．この場合xは一般化座標では**ない**．それは単に，連続的な指標として p.548 不連続なiの代わりに用いられているのである．iの各々の値が，系の異なる一般化座標の1つη_iに対応しているのとちょうど同じように，ここではxの各々の値に対して一般化座標$\eta(x)$が存在している．ηはxの他に，連続変数tにも依存するから，xもtも同じようにラグランジアンの中にはいってくるパラメーターと考えることができる．このことを示すためにより正確には$\eta(x,t)$と書くべきであろう．もし，連続的な系が，ここで考えているように1次元ではなく3次元であるならば，一般化座標ηは3つの連続的な指標x, y, zで区別され，$\eta(x,y,z,t)$のように書かれる．x, y, zおよびtは完全に独立であり，ηの中に陽な変数としてのみ現われることに注意しよう．したがって，これらのうちのいずれかの変数についてのηの導関数は，常にあいまいさなしに，全導関数として書くことができる．（12－6）式はまた，ラグランジアンが連続的な指標xについての積分の形になっていることを示している．それに対応して，3次元の場合のラグランジアンは，

$$L = \iiint \mathscr{L}\, dx\, dy\, dz, \qquad (12-9)$$

の形を持つであろう．ここで$\mathscr{L}$は**ラグランジアン密度**(*Lagrangian density*) として知られている量である．連続的な棒の縦振動に対しては，ラグランジアン密度は，

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left\{\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - Y\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right\}, \qquad (12-10)$$

である．これは，(12－4) 式の中に現われる L_i の連続的な極限に対応している．系の運動を記述するために用いられるのは，ラグランジアン自身よりはラグランジアン密度の方である．

12－2　連続的な系に対するラグランジアン形式

(12－10) 式において，弾性体の棒に対する$\mathscr{L}$は，$\dot{\eta} \equiv \dfrac{d\eta}{dt}$ の関数であるが，その他に η の空間座標に関する導関数 $\dfrac{d\eta}{dx}$ をも含んでいることに注意しよう．このように x と t とはラグランジアン密度のパラメーターとして同じような役割を演じる．最隣接の相互作用に加えて，局所的に働らく力があるならば，このとき$\mathscr{L}$は η 自身および η の空間的勾配の関数となっているであろう．もちろん，一般的な場合には，$\mathscr{L}$は x と t を陽に含んでいることもあるであろう．それゆえ，1次元の連続的な系に対するラグランジアン密度は，

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(\eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\eta}{dt}, x, t\right), \qquad (12-11)$$

の形の関数として表わされるであろう．(12－10) 式によれば，このとき全ラグランジアンは，この系を定義している x の領域に関する積分であり，Hamilton の原理は，連続的な系の極限では，

$$\delta I = \delta \int_1^2 \int \mathscr{L}\, dx\, dt = 0\,, \qquad (12-12)$$

p.549
の形をとる．連続的な系に対して，Hamilton の原理がなんらかの有用性を持

つならば，運動方程式の連続的な極限，例えば（12－7）式を，（12－12）式の$\mathscr{L}$の２重積分を変分することによって直接的に導き出すことができなければならない．この変分は，不連続な系に対して第２章で使われた方法を少し変えるだけで行うことができる．変分は，ηとその導関数について行われる．パラメーターxとtは，直接的にも積分の範囲に関しても，変分によって影響を受けない．ちょうどηの変分が端点t_1とt_2で零であるようにとられたように，xに関する積分の下限および上限すなわちx_1とx_2における変分もまた零でなければならない．第２－２節におけるように，ηの可能な関数から例えば次のように１パラメーター族を選ぶことによって，η空間での積分の道筋の適切な変更が得られる．

$$\eta(x, t; \alpha) = \eta(x, t; 0) + \alpha\zeta(x, t). \qquad (12-13)$$

ここで，$\eta(x, t, 0)$はHamiltonの原理を満足する正しい関数を表わし，ζはtとxの端点で零となる性質のよい任意関数である．もし，Iがαの関数として，$\eta(x, t, 0)$に対して極値をとるならば，Iのαに関する導関数は$\alpha=0$で零となる．直接微分することによって，

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} dx\,dt\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{d\eta}{dt}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{d\eta}{dt}\right) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{d\eta}{dx}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)\right\} \qquad (12-14)$$

が得られる．ηの変分，すなわち，$\alpha\zeta$が端点で零であるから，xおよびtに関する部分積分によって，

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{d\eta}{dt}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)dt = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{d\eta}{dt}}\right)\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}dt,$$

および

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{d\eta}{dx}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)dx = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{d\eta}{dx}}\right)\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}dx$$

が得られる．したがってHamiltonの原理は，

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} dx\,dt\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{d\eta}{dt}}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{d\eta}{dx}}\right)\right\}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)_0=0, \qquad (12-15)$$

と書くことができる．第２－２節と同じ議論によって，変分された経路が任意であることから，{　}の中の式が零にならなければならない．すなわち，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{d\eta}{dt}}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{d\eta}{dx}}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta}=0\,, \qquad (12-16)$$

p.550
が成り立つ．(12－16)式は，Hamiltonの原理(12－12)式から導かれた運動方程式の適当な形である．

自由度 n の不連続な系に対しては n 個のLagrangeの運動方程式が存在するであろう．ところが，自由度が無限に多い連続的な系に対しては，ただ１つのLagrange方程式が得られるように見える！ しかし，η に対する運動方程式は時間だけを含む微分方程式であり，その意味では(12－16)式は，x の各々の値に対して別々の運動方程式を与えることを思い出さなければならない．指標 x が連続であるということは，(12－16)式が２つの変数 x と t についての偏微分方程式であり，η を $\eta(x,t)$ の形で与えるものである，ということに現われている．

長い弾性体の棒の縦振動という特別な例では，ラグランジアン密度(12－10)式の形から

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{d\eta}{dt}}=\mu\frac{d\eta}{dt}, \qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{d\eta}{dx}}=-Y\frac{d\eta}{dx}, \qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta}=0\,,$$

であることがわかる．このようにして，望んでいた通り，Euler-Lagrangeの方程式(12－16)は，まさしく運動方程式(12－7)に帰着する．

ここで展開した１次元の連続的な系に関するラグランジアンによる定式化は，明らかに２次元および３次元の場合，例えば一般の弾性体，にまで拡張する必要がある．さらに，１つの場の量 η の代わりに，数個の場の量があるかも知れない．例えば，つり合いの位置からの変位は３つの成分を持った空間ベクトル

ηによって記述されるであろう．１成分で１次元の場合と密接に平行的に，もっと一般的な状況における数学的計算を実行することには何も困難はない．しかし，同じような書き方をするとすれば，特に２階の導関数が現われるときには，式は長くなり厄介なものになる．時間 t と空間座標 x, y, z は，Hamilton の原理において同じ数学的役割を演じることに注意すれば，記号の上ではかなり簡単化される．場の量は，時間と空間座標の関数であり，それらは独立な変数として取り扱わなければならない．Hamilton の原理における時間と空間の両方に関する積分限界では，場の量の変分は行われない．

$x_0 = t,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$ という座標を持つ４次元空間を用いて考えると数学的に便利である．この空間は物理的な意味は持っていない．第７章におけるように，ローマ字の添字は物理空間の３つの座標のみに関係し，ギリシャ文字の添字は，４つの座標全部に関係するものである．この章の残りの部分では，繰り返し現われる指標に関しては和をとるという規約を再び用いることにしよう．場の量の種々の成分は添字 ρ によって表わすことにする．添字は多くの形式を取り扱うことができることを強調しておくべきであろう．時々，添字は２つ，３つあるいは４つまたはそれ以上の値をもつ１つの指標を代表するであろう．また，添字は多くの指標を表わすかもしれない．例えば，もし場の量が２階の空間テンソルであるならば，ρ は実際には２つの添字をもつ指標である．最後に，場の量の４つの座標 x_ν のうちのどれか１つについての導関数は，
p.551
ρ と ν との間にコンマをはさんで表わすことにしよう．場の量が１個だけのときには，コンマの前に空白を置くことにする．例は次のようなものである．

$$\eta_{\rho,\nu} \equiv \frac{d\eta_\rho}{dx_\nu}; \qquad \eta_{\ ,j} \equiv \frac{d\eta}{dx_j}; \qquad \eta_{i,\mu\nu} = \frac{d^2\eta_i}{dx_\mu\, dx_\nu}. \qquad (12-17)$$

場の量の導関数に対してのみこのような記法を用いよう．

この記法では，ここで考えられるべきラグランジアン密度の最も一般的な形は，

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\eta_\rho, \eta_{\rho,\nu}, x_\nu)\,, \qquad (12-18)$$

のように書くことができる．このとき，全ラグランジアンは，３次元空間にわ

たる積分で，

$$L=\int \mathscr{L}(dx_i), \tag{12-19}$$

となるが，これはあまり陽には現われない．Hamiltonの原理は4次元空間でのある領域にわたる積分として現われ，次のように表わされる．

$$\delta I=\delta\int \mathscr{L}(dx_\mu)=0, \tag{12-20}$$

ここで，η_ρの変分は積分領域の限界を与える曲面Sの上では零である．対応するEuler-Lagrangeの運動方程式の導出は，前の場合と同様に記号的に進められる．パラメーターαを零にすると$\eta_\rho(x_\nu)$となるような1パラメーターの変分された関数の組を考えよう．前と同じように，例えばη_ρに$\alpha\zeta_\rho$を付け加えることによって，可能な適当な組をつくることができる．ここで$\zeta_\rho(x_\nu)$は境界面上で零となる都合のよい任意関数である．Iの変分が零になるということは，Iのαに関する導関数，

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_\rho}\frac{\partial\eta_\rho}{\partial\alpha}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\frac{\partial\eta_{\rho,\nu}}{\partial\alpha}\right)(dx_\mu),$$

を零と置くことと等価である.* 部分積分を行うと，

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_\rho}-\frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\right)\right]\frac{\partial\eta_\rho}{\partial\alpha}(dx_\mu)$$

$$+\int(dx_\mu)\frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\frac{\partial\eta_\rho}{\partial\alpha}\right), \tag{12-21}$$

が得られる．いろいろな方法で見られるように，右辺の2番目の積分は$\alpha\to 0$の極限で零となる．この積分は，各々の導関数の項を特定のx_νについての積分を行うことによって，各項ごとに調べることができる．そして，端点ではαに関する導関数が零であるから，各項の積分は零になることがわかる．あるいは，この積分を，4次元の発散定理によって，4次元空間の積分領域を囲んでいる
p.552 表面上での積分に変えることができる．表面上では，正しい場の関数の近傍に

*) 特に断わらない限り，この章の以下の部分では，すべての型の添字について和の規約を使うことにする．

おける η_ρ の変分は零であるから，表面積分は再び零になる．したがって，$\alpha \to 0$ の極限において（12－21）式は，

$$\left(\frac{dI}{d\alpha}\right)_0 = \int (dx_\mu)\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_\rho} - \frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\right)\right]\left(\frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha}\right)_0, \qquad (12-22)$$

となる．再び，各々の η_ρ の変分が任意であるということから，（12－22）式が満足されるのは，角括弧の各々が零になるときだけであることがわかる．したがって，

$$\frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_\rho} = 0. \qquad (12-23)$$

（12－23）式は，場の量に関する1組の偏微分方程式を表わしている．その方程式の数は，異なった ρ の値の数と同数である．空間座標 x_i は実際上場の量についての指標であるから，（12－23）式の各々は，連続的でない系の場合の Lagrange の運動方程式の完全な組に対応することを繰り返し述べておくことは意義のあることである．

ν が0と1の値のみをとる，1次元の連続的な系に対しては，（12－23）式は（12－16）式と同じ形に展開される．この記法が簡潔であることは，非常に簡単な例においてさえも明らかである．もちろん，記号上の便利さのために4次元空間を用いても，その空間において，いかなる量の（物理学者の使う意味での）共変性も要求されるわけではない．完全気体の中の音波を表わす場の場合はそのよい例である．このとき，場の量はベクトル $\boldsymbol{\eta}$ の成分であって，音の振動がないときの気体の粒子のつり合いの位置からの変位を表わしている．われわれが求めているのは，気体中の縦振動に対する運動方程式である．すなわち，音の伝播に対するベクトル波動方程式である．音波のつくる場に対する適当なラグランジアン密度は，付録Eで導出されているように，

$$\mathscr{L} = \tfrac{1}{2}(\mu_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 + 2P_0 \nabla\cdot\boldsymbol{\eta} - \gamma P_0(\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})^2), \qquad (12-24)$$

の形に書くことができる．ここで，μ_0 はつり合いにある気体の質量密度，P_0 はつり合いにある気体の圧力である．$\mathscr{L}$ の第1項は，明らかに運動エネルギー密度である．残りの項は，単位体積当りの気体のポテンシャル・エネルギーの変

化を表わしており，これは音響振動の特徴である気体の収縮と膨張の過程で，気体になされる仕事あるいは気体のする仕事から出てくるものである．ポテンシャル・エネルギーの中に γ が現われているが，これは定圧比熱と定積比熱の比であって，音波による気体の圧縮と膨張が等温的にではなく断熱的に行われるために入って来たのである．4次元の記法では，ラグランジアン密度は，

$$\mathscr{L}=\tfrac{1}{2}(\mu_0\eta_{i,0}\eta_{i,0}+2P_0\eta_{i,i}-\gamma P_0\eta_{i,i}\eta_{j,j}), \qquad (12-25)$$

と書かれる．$\mathscr{L}$ の中の真中の項は明らかに運動方程式には寄与しない．なぜな
p.553
ら，この項の $\eta_{i,j}$ に関する偏導関数は零または定数だからである．したがって，運動方程式（12－23）は，

$$\mu_0\eta_{j,00}-\gamma P_0\eta_{i,ij}=0, \quad j=1,2,3 \qquad (12-26)$$

となる．ベクトル記法に戻ると，（12－26）式は1つのベクトル方程式，

$$\mu_0\frac{d^2\boldsymbol{\eta}}{dt^2}-\gamma P_0\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}=0\ , \qquad (12-27)$$

の形に書き表わされる．

（12－26）式あるいは（12－27）式の運動方程式，およびそれらが導かれたラグランジアン密度に対して2つの点を注意しておこう．1つは，微小な振幅の振動に対して，気体の密度の微小な変化 σ が $\boldsymbol{\eta}$ と，

$$\sigma=-\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}$$

で表わされる関係で結ばれているという事実を用いて，（12－27）式をもっとわかり易い形に書くことができるということである（付録E参照）．（12－27）式に，発散演算子 ∇ を作用させれば，スカラー方程式，

$$\nabla^2\sigma-\frac{\mu_0}{\gamma P_0}\frac{d^2\sigma}{dt^2}=0, \qquad (12-28)$$

が得られる．この式は3次元の波動方程式であることは容易にわかり，気体中の音波の速度は，

$$v=\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}\ , \qquad (12-29)$$

である．質点の力学の場合と同様に，もしラグランジアンを用いる定式化の主な目的が，ラグランジアンから運動方程式を導くことであるならば，(12－28)式に対応する適当なラグランジアン密度は，

$$\mathscr{L} = \tfrac{1}{2}(\mu_0 \sigma^2{}_{,0} - \gamma P_0 \sigma_{\ ,i} \sigma_{\ ,i}), \qquad (12-30)$$

である．もちろん(12－30)式は，ラグランジアン密度(12－25)式と同じ物理的内容を持っていないし，また一方から他方を直接に導くことはできない．しかし(12－30)式から，スカラー波動方程式(12－28)が得られる．

もう1つの重要な点は，(12－24)式の $\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}$ の項は運動方程式に寄与しないという観察に由来するものである．これは，ラグランジアンが一般化座標と時間の任意の関数の時間に関する全導関数だけ不定である，という不連続な系の性質に対応している．連続的な系に対してこれに対応することは，$\mathscr{L}$は任意の“4次元発散”，すなわち，

$$\frac{dF_\nu(\eta_\rho, x_\mu)}{dx_\nu}$$

の形の項だけ不定であるということである．ここで，F_νは場の量 η_ρ と座標 x_μ の(微分可能な)4つの任意関数である．そのような項は作用積分の変分にはなんの寄与もしないことは明らかである．4次元空間の発散定理を適用すれば，体積積分を，その体積を囲んでいる曲面上の表面積分に変換することができる．この曲面上での F_ν の変分は零である．式で表わすと，問題の変分は，

p.554

$$\delta \int (dx_\mu) \frac{dF_\nu(\eta_\rho, x_\mu)}{dx_\nu} = \delta \int F_\nu(\eta_\rho, x_\mu)\, d\sigma_\nu = 0, \qquad (12-31)$$

と書くことができる．ここで $d\sigma_\nu$ は(4次元空間の)曲面の外向き法線の面積要素の成分を表わす*．(12－24)式の真中の項は，

$$F_0 = 0, \qquad F_i = 2P_0\eta_i\ ,$$

で与えられる関数 F_ν によって，この部類にはいるものであることがわかるで

---

*) 例えば，もし4次元空間における曲面が，時間が一定の曲面であるならば，$d\sigma_\nu$の零とならない成分は $d\sigma_0 = dV \equiv dx\,dy\,dz$ である．このように，この場合の外向き法線の方向は時間軸の方向である．

あろう.

一般化座標の連続な組に対するラグランジアンによる定式化は，縦振動をする弾性体あるいは音波を発生するように振動している気体のような，連続的な力学系を取り扱うために展開されてきた．すでに示唆されたように，ラグランジアンによる定式化は，力学系がないときでさえも，場を支配する方程式を記述するために用いることができる．数学的には，場は時間と空間の１つまたは２つ以上の独立な関数の組にほかならない．また，一般化座標はこの定義にまさにぴったりと適合している．場が，基礎となるある力学系に関係づけられるという要請はまったく必要でない．このように，ラグランジアンを用いる場の記述と，純粋な力学系の間の結びつきを断つということは，まさに物理学の歴史をたどっているのである．例えば，電磁場は長い間神秘的なエーテルの弾性振動と考えられていた．エーテルが“振動する”という動詞の主語であるということ以外には，他のどんな役割も演じないということが認識されるようになったのはごく最近になってである†．ここで展開された変分による取り扱いは，連続的な力学系という概念とは無関係であること，また任意の時空的な場を記述する方程式を与えるのに有用であることがまったく同様に認められる．この場合，Hamilton の原理は，実質的に便利でまとまった形の場の記述を与える．すなわち，この記述は展開によって場の方程式へと導かれる．

この，より大きい文脈の下では，ラグランジアン密度は運動エネルギー密度とポテンシャル・エネルギー密度の差である必要はない．その代わりに，求める場の方程式を与えるものであるならばどんな形の$\mathcal{L}$を用いてもよい．このようにして音の場に関するラグランジアン密度（12－24）式は，ベクトル変位$\boldsymbol{\eta}$によって自然に与えられることを見た．しかし，またわれわれは，この場が気体の密度の変化の割合を表わすスカラーσによっても表わされることも注意した．σに対する波動方程式は，（12－30）式によって与えられるラグランジアン密度から導かれるが，（12－30）式は（12－24）式と同じではなく，また基礎

*）科学の促進のための英国協会における会長講演においてSalisbury伯爵は，“エーテルという言葉の主な働きは，それが唯一の働きではないとしても，“振動する”という動詞に対する主格であるということであった”と述べている（BAASの1894年の報告の８ページを見よ）．同じ考え方は，それ以前に表明されたことがあったかも知れない．

にとるどんな力学系によっても導き出すことはできない．（12－30）式のラグランジアン密度は正しい場の方程式に導き，そのことが求められていることのすべてである．

しかし，ラグランジアン密度は，場の方程式がそれから導かれるということに加えて，場の物理的性質についてもっと多くのことを知らせてくれる．不連続な数で表わされる自由度を持つ系に対してと同様に，ラグランジアンの構造は系の保存される性質についての情報をも含んでいる．保存則のそのような1つの組については次節で論じられるであろう*.

12－3　応力－エネルギー・テンソル(stress-energy tensor)と保存則

ここでは，第2－6節の質点の力学におけるJacobiの積分の保存と類似した事柄が，大変よく似た方法で導かれる．覚えておくべきことは，時間がx_iと平行的に取り扱われるように拡張されなければならないということだけである．なぜなら，座標x_iと時間tとはいずれも$\mathscr{L}$の中の独立なパラメーターだからである．したがって，Lの時間に関する導関数のかわりに，x_μに関する$\mathscr{L}$の全導関数，

$$\frac{d\mathscr{L}}{dx_\mu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_\rho}\eta_{\rho,\mu} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu\nu} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu},$$

を計算したい．運動方程式（12－23）によって，x_μに関する$\mathscr{L}$の全導関数は（さらに記法を少し変えて），

$$\begin{aligned}\frac{d\mathscr{L}}{dx_\mu} &= \frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\right)\eta_{\rho,\mu} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\frac{d\eta_{\rho,\mu}}{dx_\nu} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}\\ &= \frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu}\right) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu},\end{aligned}$$

となる．全導関数の部分をまとめれば，上の式は

$$\frac{d}{dx_\nu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu} - \mathscr{L}\delta_{\mu\nu}\right\} = -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}, \tag{12－32}$$

*) ラグランジアンに固有な保存性についてのもっと一般的な研究は，Noetherの定理について述べた第12－7節で見られるであろう．

と書くことができる.

さて，$\mathscr{L}$ は x_μ に陽には依存しないと仮定しよう．このことは通常 $\mathscr{L}$ が自由場を表わすことを意味する．すなわち，$\mathscr{L}$ は空間内の陽に示された点において，与えられた時間依存性をもって相互作用する，外部から作用する湧き口や吸込み口を含んでいないとしよう．実質的にはこのことは，場と場の中を通って時間と空間内を運動する粒子の間に相互作用がないことを意味する．この条件の下で，（12－32）式は1組の発散条件の形，

$$\frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu}=0, \tag{12-33}$$

p.556
をとる．ここで $T_{\mu\nu}$ は，

$$T_{\mu\nu}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu}-\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}, \tag{12-34}$$

で与えられる2階の4元テンソルの形を持つ量である．これらの方程式は，4次元空間におけるテンソル方程式の形を持つだけであるということを強調しておく．なぜなら，これまでの所では，4次元空間は変換性を持たず ── 空間と時間はやはり異なった性質を持っており ── また $T_{\mu\nu}$ に対しては変換性の要求は何もないからである．しかしながら，これらの量の空間部分は，通常の3次元空間でのベクトルやテンソルのように振舞う．すなわち，T_{ij} は2階の3次元テンソルの成分である.

$T_{\mu\nu}$ とJacobiの積分（2－53）式との間の類似性は明らかである．このことは，成分 T_{00}，すなわち

$$T_{00}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}_\rho}\dot{\eta}_\rho-\mathscr{L}, \tag{12-34'}$$

に対しては特に明白である．力学系においては，ラグランジアン密度はしばしば $\mathscr{L}=\mathscr{T}-\mathscr{V}$，すなわち，運動エネルギー密度とポテンシャル・エネルギー密度の差の形をしている．確かに例えば弾性体の棒に対するラグランジアン密度，（12－10）式および音の振動に対するラグランジアン密度（12－24）式に対してはそうなっている．そこでは運動エネルギー密度は（質量密度の $\frac{1}{2}$）×（変位速度の2乗）の形，すなわち，

$$\mathscr{T} = \tfrac{1}{2}\mu\dot{\eta}_\rho\dot{\eta}_\rho$$

の形をしている．質点の力学において用いられたのと同様な議論によって，T_{00} は全エネルギー密度とみなされる．

$T_{\mu\nu}$ の他の成分につけられるべき名札は，(12－33) 式の組を，

$$\frac{dT_{\mu 0}}{dt} + \frac{dT_{\mu j}}{dx_j} = 0, \qquad (12-35)$$

あるいは，

$$\frac{dT_{\mu 0}}{dt} + \nabla\cdot\mathbf{T}_\mu = 0, \qquad (12-35')$$

の形に書くことによって示唆される．ここで $\mathbf{T}_\mu$ は4個の3次元空間のベクトルの組である．(12－35) 式あるいは (12－35′) 式のいずれの形でも，これらは連続の方程式の形になっている．これらの方程式は，ある密度の時間的変化の割合と，対応する束 (flux) あるいは流れの密度の発散の和が零となることを述べている ((7－76) 式を参照せよ)．また，場の体積が有限であるなら，すなわち，場がある領域の中に含まれていてその領域の外側では零であるならば，連続の方程式はある積分量が保存されることを意味する．そのような場合には，積分量 R_μ を，

$$R_\mu = \int T_{\mu 0}\, dV, \qquad (12-36)$$

p.557 によって定義する．ここで体積積分は場が存在する領域を含むようにとられる．このとき，(12－35′) 式によって，

$$\frac{dR_\mu}{dt} = -\int \nabla\cdot\mathbf{T}_\mu\, dV = -\int \mathbf{T}_\mu\cdot d\mathbf{A} = 0 \qquad (12-37)$$

が成り立つ． 4つの量の組 $T_{\mu\nu}$, $\mu = 1, 2, 3, 4$ が現代物理学の用語で**保存される流れ** (*conserved currents*) として知られているのは，(12－33) 式から導かれるこれらの保存則があるからである．

したがって，T_{0i} はエネルギーの流れの密度の成分の役目をすることが期待される．このことがもっともらしいことは，再び弾性棒の縦振動の場を考察する

ことによって了解される．仮りに点 x で棒を切断したとしよう（図12－2参照）．ラグランジアン（12－6）式に導く考察から，切断点の右側の部分が左側の部分を引き伸ばすように作用する力は，

$$Y\frac{d\eta}{dx},$$

である．したがって，x の左側の部分には，大きさは等しいが反対向きの張力がある．さらに左側の部分は x の点において η の大きさだけ引き伸ばされており，この伸びが時間的に変わる割合は $\dot{\eta}$ である．切断面においてこの張力によってなされる仕事率は，

$$-\dot{\eta}Y\frac{d\eta}{dx}, \qquad (12-38)$$

であって，この仕事率は，単位時間当り右側へ伝わるエネルギーの割合である．くらべてみると，（12－10）式という適切なラグランジアン密度に対して，これは厳密に T_{01} であることがわかる．もし T_{00} がエネルギー密度であるならば，このとき（12－36）式の R_0 は場の全エネルギーとみなすことができる．したがって，流れの保存を表わす方程式（12－37）の第 4 成分は，もし T_{0i} が境界面
p.558
上で零である，すなわち系が外部に向ってエネルギーを放出しないならば，場の全エネルギーが保存されることを述べている．

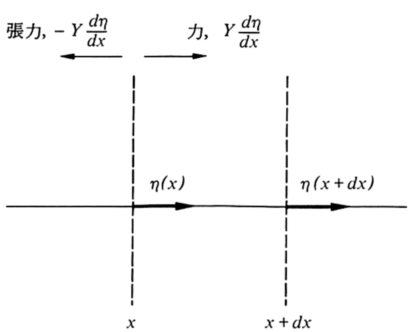


図 12－2
弾性棒の中のエネルギーの流れの密度の計算を示す図.

T_{i0} 成分の物理的意味は，同様にもう一度弾性棒の振動へ戻ることによって示される．棒の中の粒子が，棒に沿って同じ量だけ動くならば，運動は剛体の運動すなわち振動のない運動になるであろう．運動の結果として，棒の長さ dx の部分の質量の正味の変化は，x を通ったのと同じだけの質量が $x + dx$ を通って移動するので，明らかに零となるであろう．この剛体運動の場合にも，正味の運動量密度 $\mu\dot{\eta}$ が存在する．波動が生ずるときには，dx の長さの部分で正味の質量の変化が生じ，与えられた任意の時刻において，

$$\mu(\eta(x) - \eta(x + dx)) = -\mu\frac{d\eta}{dx}dx\,,$$

となる（図12－2参照）．したがって，その時間の間に波動によって生じた運動量の増加は，

$$-\mu\dot{\eta}\frac{d\eta}{dx}dx\,,$$

である．このように，定常運動の運動量密度に加えて，波動あるいは場の運動量密度とみなされる付加的な運動量密度，

$$-\mu\dot{\eta}\frac{d\eta}{dx}\,, \qquad (12-39)$$

がある．この量は正に，（12－10）式によって与えられるラグランジアン密度に対する $-T_{10}$ である．したがって，少なくともこの4次元の規約では，$-T_{i0}$ を場の運動量密度の成分とみなし，また $-R_i$ を場の全(線)運動量とみなすことができる．

連続の方程式（12－35′）は，このとき $-\mathbf{T}_i$ が場の運動量密度の i 番目の成分に対するベクトル束密度（vector flux density）を表わさなければならないことを示唆している．例えば，$-T_{12}$ によって測られるような，運動量密度の x 成分の y 方向の流れが可能であるから，$\mathbf{T}_i$ にベクトル性を持たせるのである．T_{ij} のもう1つの解釈は，弾性体の変位場を考えることから生じてくる．弾性体においては，面に垂直な圧縮力のほかに，面積要素に沿うずれの応力が存在することが知られている．力を全部集めたものは，微小面積 $d\mathbf{A}$ を通して作用する力 $d\mathbf{F}$ が，**応力テンソル T** を用いて，

$$d\mathbf{F} = \mathbf{T} \cdot d\mathbf{A}\ ,$$

p.559
と表わされるようなものであるということができる.* それゆえ，直方体の微小体積 $dx\,dy\,dz$ に，例えば x 方向に作用する正味の力は，yz 平面に平行な面に働らく力から，

$$[T_{11}(x+dx) - T_{11}(x)]\,dy\,dz = \frac{dT_{11}}{dx}\,dx\,dy\,dz,$$

で与えられる寄与を受けるが，また xz 平面に平行な面から，

$$[T_{12}(y+dy) - T_{12}(y)]\,dx\,dz = \frac{dT_{12}}{dy}\,dx\,dy\,dz,$$

だけの寄与を受け，同じように xy 平面からも寄与を受ける (図 12－3 参照). この場合，Newton の運動方程式は，x 方向の運動量密度 $-T_{10}$ の時間的な変化の割合は，単位体積に作用する力の x 成分に等しいということに対応する. すなわち，

$$-\frac{dT_{10}}{dt} = \frac{dT_{11}}{dx} + \frac{dT_{12}}{dy} + \frac{dT_{13}}{dz},$$

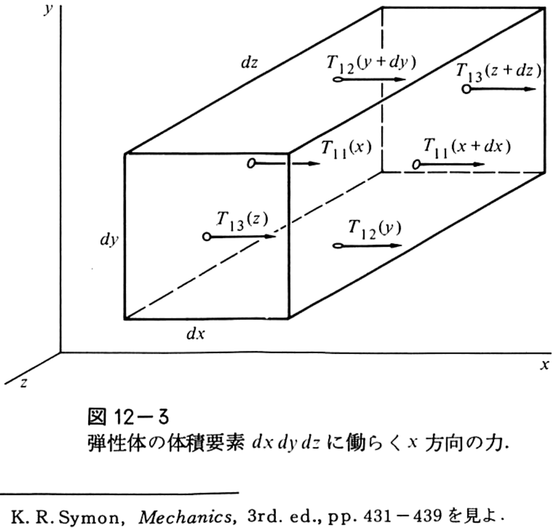


図 12－3
弾性体の体積要素 $dx\,dy\,dz$ に働らく x 方向の力.

---

*) 例えば，K. R. Symon, *Mechanics*, 3rd. ed., pp. 431－439 を見よ.

が成立する．この式はちょうど（12－35′）式の x 成分である．この特別な場に対して，T_{ij} は3次元の応力テンソルの成分とみなすことができる．$T_{\mu\nu}$ を〝応力・エネルギー・テンソル”と呼ぶことの起源はここにあるのである．

連続的な力学系の考察によって，われわれはこのようにして，応力・エネルギー・テンソルの成分の各々に物理的な意味づけ，すなわち関連性を与えることができた．これらをまとめた形で書くと次のようになる．

p.560

T_{00}	場のエネルギー密度．
$\mathbf{T}_0$，成分 T_{0j}	場のエネルギーの流れの密度．
$-T_{i0}$	場の運動量密度，i 番目の成分．
$-\mathbf{T}_i$, 成分 T_{ij}	場の運動量密度の i 番目の成分に対する流れの密度．
T_{ij}	3次元の応力テンソル．

力学系の例がこれらの手続きと用語を誕生させたのではあるが，この定式化は場の性質あるいは起源にはかかわりなく，任意の場に対して適用できることを忘れてはならない．場の古典論は，弾性体の振動に対してのみ構築されるのではなく，例えば電磁場やSchrödingerの波動関数の〝場”，あるいは〝スカラー”中間子を記述する相対論的な場などに対しても構築することができるのである．後に，これらの例のいくつかをもっと詳しく調べることにしよう．例を示すという当面の目的のために，2成分の場 η_1, η_2 を考えよう．この場の性質は，現存するどの理論にも対応しないように慎重に選ばれる．場の方程式は，

$$\begin{aligned} a\nabla^2\eta_1 + b\frac{d\eta_1}{dt} - c\frac{d^2\eta_1}{dt^2} &= f\eta_2, \\ a\nabla^2\eta_2 - b\frac{d\eta_2}{dt} - c\frac{d^2\eta_2}{dt^2} &= g\eta_1, \end{aligned} \qquad (12-40)$$

であるとしよう．これらの場の方程式は，ラグランジアン密度，

$$\mathscr{L} = c\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + \frac{b}{2}(\dot{\eta}_1\eta_2 - \eta_1\dot{\eta}_2) - a\nabla\eta_1\cdot\nabla\eta_2 - \frac{1}{2}(f\eta_2^2 + g\eta_1^2), \qquad (12-41)$$

から導出されることは容易にわかる．このラグランジアン密度に対する応力・エネルギー・テンソルの成分は，

$$T_{00} = c\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + a\nabla\eta_1 \cdot \nabla\eta_2 + \frac{1}{2}(f\eta_2^2 + g\eta_1^2), \qquad (12-42)$$

(不連続な系のエネルギーの場合と同様に，速度に関して 1 次の項は落ちる)

$$T_{0i} = -a\left(\dot{\eta}_1\frac{d\eta_2}{dx_i} + \dot{\eta}_2\frac{d\eta_1}{dx_i}\right), \qquad (12-43)$$

$$T_{i0} = c\left(\dot{\eta}_1\frac{d\eta_2}{dx_i} + \dot{\eta}_2\frac{d\eta_1}{dx_i}\right) + \frac{b}{2}\left(\eta_2\frac{d\eta_1}{dx_i} - \eta_1\frac{d\eta_2}{dx_i}\right), \qquad (12-44)$$

$$T_{ij} = -a\left(\frac{d\eta_1}{dx_i}\frac{d\eta_2}{dx_j} + \frac{d\eta_1}{dx_j}\frac{d\eta_2}{dx_i}\right) - \mathscr{L}\delta_{ij}, \qquad (12-45)$$

p.561
である．この例において，3 次元テンソル **T** は対称であることに注意しよう．このことは，応力・エネルギー・テンソルの空間部分に対する物理的に望ましい，人によってはほとんど必要であるというかも知れない，特性である．R_iの物理的意味を思い出すと，保存方程式 (12－37) は，閉じた相互作用をしない系に対しては，場の全線運動量が保存されることを述べている．われわれは同様なことを期待するであろう．しかし，場の全角運動量に対しても対応する保存則があるはずである．角運動量密度として働く 1 つの量をつくることは簡単である．角運動量は軸性ベクトルであるから，角運動量密度の成分は 2 階の反対称テンソルの要素であることが期待される．この角運動量 (すなわち“運動量のモーメント”) 密度テンソルの適当な形は，

$$\mathscr{M}_{ij} = -(x_i T_{j0} - x_j T_{i0}), \qquad (12-46)$$

である．場の全角運動量は，

$$M_{ij} = \int \mathscr{M}_{ij}\, dV$$

で与えられる．t と x_j とは完全に独立な変数であるから，M_{ij}の時間的変化率は，

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = -\int\left(x_i\frac{dT_{j0}}{dt} - x_j\frac{dT_{i0}}{dt}\right)dV,$$

または，連続の方程式 (12－35) から，

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = \int \left(x_i \frac{dT_{jk}}{dx_k} - x_j \frac{dT_{ik}}{dx_k} \right) dV,$$

となる．部分積分を行うと，この式は，

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = \int \frac{d}{dx_k}(x_i T_{jk} - x_j T_{ik})\, dV - \int (T_{ji} - T_{ij})\, dV, \qquad (12-47)$$

に変わる．右辺の最初の積分は発散の体積積分の形をしている．したがって，それは体積を囲む表面にわたっての積分に等しくなり，閉じた，放射を行わない系に対しては零となる．最後に，もし $T_{ij} = T_{ji}$ であるならば，第2項の積分は零である．したがって，場の全角運動量は，もし **T** が対称であれば，保存される．

ここで選ばれた例では，応力テンソルは実際に対称である．このことが常に成り立つことは保障されてはおらず，また直接得られる応力テンソルが非対称であるような良く知られた場がある．しかしながら，応力テンソル $T_{\mu\nu}$ が，ちょうど $\mathscr{L}$ のときと同様に，一義的には定義されないということに注意することによって，角運動量が保存されるという望ましい結果をしばしば救うことができる.* （12－34）式の $T_{\mu\nu}$ の形は，もともと発散の条件（12→33）式を満たす p.562 から選ばれたのである．したがって $T_{\mu\nu}$ は，その4元的発散が零となるような任意関数だけ不定なのである．この任意関数の全く一般的な候補は，

$$\frac{d\psi_{\mu\nu\lambda}}{dx_\lambda},$$

の形の量である．ここで $\psi_{\mu\nu\lambda}$ は場の変数の関数の任意の組であるが，反対称性，

$$\psi_{\mu\nu\lambda} = -\psi_{\mu\lambda\nu}$$

を持っているとする．4元的発散を計算するときに，ν と λ はダミー指標であるから，それは

---

*) このことは予期されないことではない．例えば，電磁気学の理論において，エネルギー密度あるいはエネルギーの流れの密度（Poynting のベクトル）に対する式は，空間的発散で表わされる量だけ不定であることは長い間理解されていた（また論争の種であった）．このような性質を持つ付加的な量は，全エネルギーあるいは全エネルギーの流れのような観測可能な積分にはなにも寄与しない．

$$\frac{d^2\psi_{\mu\nu\lambda}}{dx_\nu dx_\lambda} + \frac{d^2\psi_{\mu\lambda\nu}}{dx_\lambda dx_\nu},$$

のような１対の項から成っており（和の規約は適用しない！），反対称条件によって恒等的に零となる．このように，$T_{\mu\nu}$ のこの不定性は，しばしば応力・エネルギー・テンソルを“対称化”することを可能にする．これは古典場を構成するときに常に行われる１つの手続きである．その例は後で述べることにしよう．

12－4　ハミルトニアン形式，Poissonの括弧式および運動量表示

不連続な系に対して第８章でなされたのとほとんど同様にして座標の連続的な組を持つ系に対するハミルトニアンによる定式化を得ることができる．その方法を示すために，第12－1節で論じられた，質点の１次元の鎖に簡単に戻ってみよう．各 η_i に共役な正準運動量，

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}\ , \tag{12-48}$$

がある．したがって，この系に対するハミルトニアンは，

$$H \equiv \sum_i\ p_i\dot{\eta}_i - L = \sum_i a\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}\dot{\eta}_i - L,$$

あるいは，

$$H = \sum_i\ a\left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}\dot{\eta}_i - L_i\right), \tag{12-49}$$

である．連続的な棒への極限では，a が零に近づくときに $L_i \to \mathscr{L}$ となり，（12－49）式の和は，積分となり，

$$H = \int dx\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}}\dot{\eta} - \mathscr{L}\right), \tag{12-50}$$

p. 563
となることが思い出されるであろう．（12－48）式で与えられる個々の正準運動量 p_i は，連続的な極限では零になるが，この極限でも有限になるような**運動量密度**（momentum density）π を，

$$\lim_{a\to 0}\frac{p_i}{a}\equiv\pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}}, \tag{12-51}$$

で定義することができる.（12－50）式は,

$$\mathscr{H}=\pi\dot{\eta}-\mathscr{L} \tag{12-52}$$

によって定義される**ハミルトニアン密度**（Hamiltonian density）$\mathscr{H}$についての空間積分の形である.

このようにハミルトニアンによる定式化は，古典場に対して直接的な方法で導入することができるけれども，この手続きは時間変数を特別扱いしていることに注意しよう．したがって，これは独立な時間変数と空間変数とを対称的に取り扱ったラグランジアンによる定式化の際に与えた展開の仕方と対照的である．この理由のために，ハミルトニアンを用いる方法は少なくともここで導入されたようにして，場を相対論的に共変な形式で組み入れるのには，ラグランジアンによる定式化よりも容易ではない．それゆえ，場を取り扱うときのハミルトニアンの方法は，ラグランジアンによる方法と同程度に有用であったことがないので，ここでは簡単な記述をするだけで十分であろう．

場の量 η_ρ によって記述される3次元の場に一般化するための明らかな方法は,（12－51）式と類似して，正準運動量密度,

$$\pi_\rho(x_\mu)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}_\rho}, \tag{12-53}$$

を定義することである．量 $\eta_\rho(x_i,t)$, $\pi_\rho(x_i,t)$ は合わせて，古典場とその時間的発展を記述する無限次元の**位相空間**（phase space）を定義する．不連続な系における正準運動量の保存則とほぼ同様な π_ρ に対する保存則が見出される．もし与えられた場の量 η_ρ が（（12－10）式の場合におけるように），$\mathscr{L}$に陽に含まれていないという意味でサイクリックであるならば，その時場に対するLagrange方程式は，1つの保存される流れが存在するという命題と同じように見える．すなわち,

$$\frac{d}{dx_\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\mu}}=0,$$

あるいは，

$$\frac{d\pi_\rho}{dt}+\frac{d}{dx_i}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,i}}=0, \qquad (12-54)$$

が成立する．したがって，もし η_ρ がサイクリックであるならば，積分保存量，

$$\Pi_\rho=\int dV\pi_\rho(x_i,t),$$

が存在することが導かれる．

ハミルトニアン密度に対する（12－52）式の明らかな一般化は，

$$\mathscr{H}(\eta_\rho,\eta_{\rho,i},\pi_\rho,x_\mu)=\pi_\rho\dot{\eta}_\rho-\mathscr{L}, \qquad (12-55)$$

p.564 である．ここで $\dot{\eta}_\rho$ に対する関数依存性は，定義の式（12－53）を逆に解くことによって消去されるものと仮定している．この定義から，（12－53）式によって，

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_\rho}=\dot{\eta}_\rho+\pi_\lambda\frac{\partial\dot{\eta}_\lambda}{\partial\pi_\rho}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}_\lambda}\frac{\partial\dot{\eta}_\lambda}{\partial\pi_\rho}=\dot{\eta}_\rho, \qquad (12-56)$$

が導かれる．場の正準方程式の残りの半分の式は，もっと面倒である．正準変数で表わしたとき，$\mathscr{H}$ は，$\mathscr{L}$ に陽に依存することおよび $\dot{\eta}_\rho$ を通して，η_ρ の関数である．したがって，

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta_\rho}=\pi_\lambda\frac{\partial\dot{\eta}_\lambda}{\partial\eta_\rho}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}_\lambda}\frac{\partial\dot{\eta}_\lambda}{\partial\eta_\rho}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_\rho}=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_\rho}, \qquad (12-57)$$

となる．Lagrange の方程式を用いて，上の式は，

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta_\rho}=-\frac{d}{dx_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\mu}}\right)=-\dot{\pi}_\rho-\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,i}}\right), \qquad (12-58)$$

と書くことができる．この式には $\mathscr{L}$ が現われるために，まだ有用な形になっていない．しかしながら，正確に同じような導出の仕方によって，

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta_{\rho,i}}=\pi_\lambda\frac{\partial\dot{\eta}_\lambda}{\partial\eta_{\rho,i}}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}_\lambda}\frac{\partial\dot{\eta}_\lambda}{\partial\eta_{\rho,i}}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,i}}=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,i}}, \qquad (12-59)$$

であることがわかる．したがって，正準方程式の後半を，

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta_\rho}-\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta_{\rho,i}}\right)=-\dot{\pi}_\rho, \qquad (12-60)$$

と書くことができる．(12－56) と (12－60) の式は，

$$\frac{\delta}{\delta\psi}=\frac{\partial}{\partial\psi}-\frac{d}{dx_i}\frac{\partial}{\partial\psi_{,i}}, \qquad (12-61)$$

で定義された**汎関数的導関数** (functional derivative) の概念を導入することによって，不連続な系に対するHamiltonの方程式にもっと近い記法で表わすことができる．$\mathscr{H}$ は $\pi_{\rho,i}$ の関数ではないから，(12－56) と (12－60) 式は，

$$\dot{\eta}_\rho=\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\pi_\rho}, \qquad \dot{\pi}_\rho=-\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\eta_\rho}, \qquad (12-62)$$

と表わすことができる．同じ記号を用いれば，Lagrangeの方程式 (12－23) は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}_\rho}\right)-\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\eta_\rho}=0, \qquad (12-63)$$

の形になる．しかしながら，汎関数的導関数のほぼ唯一の長所は，不連続な系との結果的な類似性ということだけである．他方，時間変数と空間変数との平行な取り扱いが落とされてしまうことになる．

p. 565

$\mathscr{H}$ の他の性質は，$\dot{\eta}_\rho$ が $\eta_\rho, \eta_{\rho,i}, \pi_\rho$ および x_μ の関数と考えられるということを思い出すことによって，(12－55) 式の時間に関する全導関数を展開することによって，得ることができる．このようにして，

$$\frac{d\mathscr{H}}{dt}=\dot{\pi}_\rho\dot{\eta}_\rho+\pi_\rho\frac{d\dot{\eta}_\rho}{dt}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_\rho}\dot{\eta}_\rho-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}_\rho}\frac{d\dot{\eta}_\rho}{dt}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,i}}\frac{d\eta_{\rho,i}}{dt}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t},$$

が得られる．右辺の第2項および第4項は，定義 (12－53) 式によって打ち消し合い，導関数は，

$$\frac{d\mathscr{H}}{dt}=\dot{\pi}_\rho\dot{\eta}_\rho-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_\rho}\dot{\eta}_\rho-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,i}}\frac{d\eta_{\rho,i}}{dt}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}, \qquad (12-64)$$

のように簡単化される．他方，$\mathscr{H}$ を $\eta_\rho, \eta_{\rho,i}, \pi_\rho$ および x_μ の関数と考えることによって，時間に関する全導関数は，

$$\frac{d\mathscr{H}}{dt}=\dot{\pi}_\rho\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_\rho}+\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta_\rho}\dot{\eta}_\rho+\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta_{\rho,i}}\frac{d\eta_{\rho,i}}{dt}+\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t}, \qquad (12-65)$$

と書くことができる．右辺の表わし方は，(12－64) 式の右辺との比較を容易

にするようになっている．このように，両式の第１項は，(12－56) 式によって同じである．同じように，両式の第２項は (12－57) 式によって一致し，第３項の等価性は (12－59) 式によって示される．したがって最後の項は等しくなければならない．すなわち，

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t}=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}, \tag{12-66}$$

である．これは，不連続な系に対する (8－13) 式に対応する．

他方，(8－35) 式に対応する式は成立しない．すなわち，$\mathscr{H}$ の時間に関する全導関数と偏導関数とは一般に同じではない．Hamilton の運動方程式(12－56) と (12－60) 式を用い，また微分の順序を入れ替えると，(12－65) 式は，

$$\frac{d\mathscr{H}}{dt}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_\rho}\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta_{\rho,i}}\right)+\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta_{\rho,i}}\frac{d\dot{\eta}_\rho}{dx_i}+\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t},$$

と書くことができる．(12－56) 式を用い，項を組み合わせると，最終的に，

$$\frac{d\mathscr{H}}{dt}=\frac{d}{dx_i}\left(\dot{\eta}_\rho\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta_{\rho,i}}\right)+\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t}, \tag{12-67}$$

が得られる．これが (8－35) 式に対して得ることのできる最も近いものである．

しかしながら，(12－67) 式はちょっと形は変わっているが，本当は前に知っていたものである．(12－55) 式の $\mathscr{H}$ が (12－34′) 式の T_{00} と同じものであることは驚ろくべきことではない．T_{00} はすでにエネルギー密度と同一視されているものである．さらに (12－59) 式によって，

$$\dot{\eta}_\rho\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta_{\rho,i}}=-\dot{\eta}_\rho\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,i}}=-T_{0i},$$

が導かれる．$\mathscr{L}$ が t を陽に含まないときには，(12－66) 式によって $\mathscr{H}$ も t を
p.566 陽に含まない．その場合には (12－67) 式は，

$$\frac{dT_{00}}{dt}+\frac{dT_{0i}}{dx_i}=0,$$

となる．これは，(12－35) 式の発散の形の保存の方程式の第１番目のもので

ある．保存される流れが存在することは，１つの積分量，ここでは，

$$P_0 \equiv H = \int \mathscr{H}\, dV, \qquad (12-68)$$

の保存を意味していることを見た．すなわち$\mathscr{H}$が時間を陽に含む関数でなければ，保存量は$\mathscr{H}$ではなくて積分量Hである．

全ハミルトニアンHは，密度の体積積分である関数のほんの１例にすぎない．そのような積分量の時間に関する導関数を求めるための一般的な手続きは，直接的に定式化することができる．位相空間の座標(η_ρ, π_ρ)，その空間的勾配および場合によってはx_μの関数である，ある密度$\mathscr{U}$，

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}(\eta_\rho, \pi_\rho, \eta_{\rho,i}, \pi_{\rho,i}, x_\mu), \qquad (12-69)$$

を考えよう．対応する積分量は，

$$U(t) = \int \mathscr{U}\, dV, \qquad (12-70)$$

である．ここで，体積積分はη_ρとπ_ρが零となる表面で囲まれている全空間にわたって行われる．Uを時間について微分すれば，一般に，

$$\frac{dU}{dt} = \int dV \left\{ \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \eta_\rho}\dot{\eta}_\rho + \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \eta_{\rho,i}}\dot{\eta}_{\rho,i} + \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \pi_\rho}\dot{\pi}_\rho + \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \pi_{\rho,i}}\dot{\pi}_{\rho,i} + \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial t} \right\}, \qquad (12-71)$$

が得られる．さて，

$$\int dV \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \eta_{\rho,i}}\dot{\eta}_{\rho,i} = \int dV \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \eta_{\rho,i}} \frac{d\dot{\eta}_\rho}{dx_i},$$

のような１つの項を考えよう．η_ρと導関数は境界面上で零になることを思い出せば，部分積分によって，

$$\int dV \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \eta_{\rho,i}}\dot{\eta}_{\rho,i} = -\int dV\, \dot{\eta}_\rho \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \eta_{\rho,i}}\right),$$

が得られる．$\dot{\pi}_{\rho,i}$の項についても同様な式の変形ができる．$\dot{\eta}_\rho$および$\dot{\pi}_\rho$の係数をそれぞれ集めると，δ記法（（12－61）式）を用いて，（12－71）式は，

$$\frac{dU}{dt} = \int dV \left\{ \frac{\delta \mathscr{U}}{\delta \eta_\rho}\dot{\eta}_\rho + \frac{\delta \mathscr{U}}{\delta \pi_\rho}\dot{\pi}_\rho + \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial t} \right\}, \qquad (12-72)$$

p.567
となる．最後に，$\dot{\eta}_\rho$および$\dot{\pi}_\rho$に対して正準運動方程式（12－62）を代入すれば，

$$\frac{dU}{dt}=\int dV\left\{\frac{\delta\mathscr{U}}{\delta\eta_\rho}\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\pi_\rho}-\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\eta_\rho}\frac{\delta\mathscr{U}}{\delta\pi_\rho}\right\}+\int dV\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial t}, \qquad (12-73)$$

を得る．右辺の最初の積分は明らかにPoissonの括弧式の形に対応している．$\mathscr{U}$と$\mathscr{W}$が2つの密度関数であるならば，すぐ上に述べたことから，

$$[U,W]=\int dV\left\{\frac{\delta\mathscr{U}}{\delta\eta_\rho}\frac{\delta\mathscr{W}}{\delta\pi_\rho}-\frac{\delta\mathscr{W}}{\delta\eta_\rho}\frac{\delta\mathscr{U}}{\delta\pi_\rho}\right\}, \qquad (12-74)$$

によって，積分量のPoissonの括弧式を定義することが示唆される．tに関するUの偏導関数の意味を，

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\int dV\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial t}, \qquad (12-75)$$

のように明白な仕方で定義することにしよう．そうすると（12－73）式は，

$$\frac{dU}{dt}=[U,H]+\frac{\partial U}{\partial t}, \qquad (12-76)$$

と書くことができて，これはこの記法では，まさに不連続な系に対する（9－94）式に対応している．定義によってHの自分自身とのPoisson の括弧式は零であるから，（12－76）式は，

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (12-77)$$

のように特に簡単な形になる．これは（12－67）式の積分形であって，また（8－35）式に対応する場の理論における式になっている．

古典場のPoissonの括弧式による定式化は，このようにハミルトニアンによる定式化の自然な結果として得られる．しかし，場の理論におけるPoissonの括弧式による記述を，不連続な系に対するPoissonの括弧式による記述と一段一段対応させて行うことはできない．例えばPoissonの括弧式は，ここでは1対の密度を用いてのみ定義されることに注意しよう．したがって，不連続な質点の力学におけるPoissonの基本括弧式に対応するPoissonの括弧式をつくることは容易ではない．実際，π_ρは密度であるが，η_ρは密度ではない．さらに，

もし x_i が力学変数に対する連続な指標の役割をするならば，Poissonの基本括孤式は x_i の異なった値における関数を含むであろう．このことは，ここで考えている定式化には容易に持ち込むことはできないであろう．このような理由で，正準変換の研究は，不連続な系に対しては大変実り多くかつ重要なテーマであったが，古典場に対してはあまりなされなかったのである．また，量子化のステップを行うことも難かしい．量子化は，通常Poissonの基本括孤式を量子論における交換子に置き換えることを含んでいるからである．

しかしながら，不連続な系の力学のハミルトニアンおよびPoissonの括孤式
p.568
による定式化の大部分を与える，古典場を取り扱う1つの方法がある，実際，この取り扱いの背後にある主要な考え方は，連続的な空間変数または指標を，可付番の不連続的な指標によって置き換えるということである．再び弾性体の棒の縦振動を引き合いに出すことによって，このことがどのように進められるかを見ることにしよう．棒は有限の長さ $L=x_2-x_1$ であるとしよう．両端で η が零になるという要請は，物理的には2つの完全剛体の壁の間に棒が置かれているという境界条件である．このとき，振動の振幅はFourier級数によって，

$$\eta(x)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n \sin\frac{2\pi n(x-x_1)}{2L}, \qquad (12-78)$$

のように表わされる．ここでは連続な指標 x のかわりに，不連続的な指標 n が現われている．すべての x に対してこの表現を用いることが許されるのは $\eta(x)$ が良い性質の関数であるときにのみであるが，大抵の物理的な場の量は振舞のよい関数である．

この考え方がどのように実行されるかを例で示すために簡単のため，

$$\eta(\mathbf{r},t)=\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\sum_k q_k(t)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \qquad (12-79)$$

の形の3次元のFourier級数に展開できるような，唯1つの実の場の量があると仮定しよう．ここで $\mathbf{k}$ はとびとびの大きさと方向をとることのできる波動ベクトル[1)](wave vector)であって，整数(または時に半整数)個の波長が1次元の与えられた長さにはいるようになっている． $\mathbf{k}$ はとびとびのスペクトルを持つといわれる．スカラーの指標 k は $\mathbf{k}$ のとびとびの値を数え上げるために用

1) 波数ベクトルともいう．

いられる整数の指標の組のある順序づけを表わす．またVは，規格化因子の中にでてくる系の体積である．ηは実であるから，$q_k^* = q_{-k}$が成立しなければならない．

この，体積についての指数関数の直交性は，

$$\frac{1}{V}\int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}\,dV = \delta_{k,k'}\,, \tag{12－80}$$

のように書くことができる．実際には，$\mathbf{k}$の可能な値は（１次元のFourier級数を見ればわかるように）条件（12－80）式が満たされるような値である．展開係数$q_k(t)$は，

$$q_k(t) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\eta(\mathbf{r},t)\,dV\,, \tag{12－81}$$

であることが導かれる．同じ様なやり方で，正準運動量密度は，

$$\pi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\sum_k p_k(t)\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \tag{12－82}$$

のように展開される．ここで再び$p_k^* = p_{-k}$である．対応して，展開係数$p_k(t)$は，

$$p_k(t) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\pi(\mathbf{r},\mathrm{t})\,dV, \tag{12－83}$$

のようにして求めることができる．

p.569

q_kとp_kは両方共（12－70）式の型の積分量である．したがって，そのような量のPoissonの括弧式を問題にすることができる．指数関数は場の量を含まないので，（12－74）式によって，

$$\begin{aligned}[q_k, p_{k'}] &= \frac{1}{V}\int dV e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}\left\{\frac{\delta\eta}{\delta\eta}\frac{\delta\pi}{\delta\pi} - \frac{\delta\pi}{\delta\eta}\frac{\delta\eta}{\delta\pi}\right\} \\ &= \frac{1}{V}\int dV e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}},\end{aligned}$$

が得られる．あるいは（12－80）式によって，

$$[q_k, p_{k'}] = \delta_{k,k'}\,, \tag{12－84}$$

となる．さらに，Poisson の括弧式（12－74）の定義から，

$$[q_k, q_{k'}] = 0 = [p_k, p_{k'}], \qquad (12-85)$$

が成り立つことは明らかである．すなわち，q_k, p_kに対するPoissonの括弧式は，1組のPoissonの基本括弧式を形成する．このことは，q_k, p_kが正準座標とみなされるということを示唆している.したがって，q_k, p_kが従う運動方程式の形は，かなり興味のあるものとなる．

(12−76)式によって，q_kの時間依存性は，

$$\dot{q}_k(t) = [q_k, H] = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\int dV e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\left\{\frac{\delta\eta}{\delta\eta}\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\pi} - \frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\eta}\frac{\delta\eta}{\delta\pi}\right\},$$

あるいは，

$$\dot{q}_k(t) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\int dV e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\pi}, \qquad (12-86)$$

から求められるはずである．他方，

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \int dV \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi}\frac{\partial\pi}{\partial p_k}, \qquad (12-87)$$

が成り立っている．$\mathscr{H}$がπの勾配の関数でない限り，偏導関数は汎関数的導関数と同じである．さらに，(12−82)式から，

$$\frac{\partial\pi}{\partial p_k} = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \qquad (12-88)$$

が得られる．そうすると，(12−87)式は(12−86)式と一致し，

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad (12-89)$$

が得られる．

p_kに対する運動方程式は，1つの余分の手続きを除いては同様にして得られる．再び，

$$\dot{p}_k = [p_k, H] = -\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}\int dV e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\eta},$$

p.570
が成立する．しかし今度は，

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \int dV\left\{\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial q_k} + \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\eta_{,j}}\frac{\partial\eta_{,j}}{\partial q_k}\right\},$$

である．しかしながら，η の勾配の成分を含む項について部分積分を行えば，この積分は汎関数的導関数を含む積分，

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \int dV \frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \eta} \frac{\partial \eta}{\partial q_k},$$

の形に書くことができる．そして（12－79）式によって，

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \qquad (12-90)$$

となることが導かれる．このようにして，量 q_k と p_k は Hamilton の方程式に従うことがわかる．

ある意味では，われわれはぐるりと1回りして元に戻ってきたことになる．この章では，可付番個の一般化座標を用いて不連続な系を議論することから出発した．ついで，変数の連続な組への極限へ移行することによって，連続的な系をどのように取り扱えばよいかを知ることができた．最後に，初めに取り扱った不連続な系と同じ型の力学に従う，可付番個の座標の組を用いた連続的な系の記述の仕方を導入した．不連続な系の変数との形式的な対応から，古典場の理論から量子場の理論へ移行するときには，量 q_k と p_k が量子化されるべき量の明らかな候補になることがわかる．事実，q_k は場に対する“占拠数”(occupation numbers）と呼ばれるものに対応している．

系の大きさが有限であることおよび境界条件によって，不連続的なFourier展開が可能になったので，不連続な座標を用いて場を記述することができたのである．このことを，展開が平面波の不連続なスペクトルにわたって行われるということもできる．波動ベクトル **k** は，量子力学においては平面波に伴なう粒子の運動量に直接比例するので，ここで用いられた展開は，しばしば**運動量表示**（momentum representation）といわれる．平面波による展開に限る必要はない．座標の可付番の集合は，場の関数が正規直交固有関数のとびとびの組を用いて展開されるときには，いつでも見出すことができる．そのような一般的展開に対する発展は，ここで平面波の関数に対してとられた段階と平行に行われており，この章の終りに引用されている文献のいくつかの中で詳細に論じられている．

12－5　相対論的な場の理論

われわれは第７章において，質点の力学の相対論的に共変なラグランジアンによる記述およびハミルトニアンによる記述を作り上げることはかなり難しいということを見た．この問題の一部は空間座標および時間座標が果す別々の役割にまでさかのぼることができる．質点に対しては，空間座標は力学変数であるが，p.571 時間は単調に変化するパラメーターである．しかし古典場の理論においては，空間座標と時間座標の取り扱いに自然な類似性がある．それらはすべてパラメーターであり，全部で場の変数が決められるべき時空連続体の１点を定義している．今までは４次元時空は記号が簡単になるという理由だけで用いられてきたが，それが容易でかつ自然な方法で定式化の中にうまくあてはまるということは，相対論的な共変形式が古典場に対して全面的に可能であることを示唆する．事実，すでに与えられている定式化に対して，比較的に小さな手直しをするだけで，相対論的な場は明白にLorentz不変な方法で取り扱うことができる．

３つの点で特別な注意が必要である．すなわち (1)用いられる４次元空間の性質（および計量），(2)場の量，ラグランジアン密度および関連する関数のLorentz変換性，および (3)積分の限界の共変的な記述，の３点である．今までわれわれが暗に用いてきた t, x, y, z という座標をもつ簡単な４次元直交空間は，Lorentz不変性を示すのには便利ではない．特殊相対論に現われるいろいろな計量と空間（第７－２節，第７－３節参照）の中で，ここではMinkowski空間を選んで用いることにしよう．一般に知られているように，このことは，そうでなければ実である物理量の中に，i を含む因子が時々出てくるという結果を生ずる．しかし，Minkowski空間は，親しみ深いことと見通しのよい簡単な記法があるという利点をもっている（この定式化の他の計量への変換のいくつかは演習問題の中で考察される）．したがって，ギリシャ文字の指標は，１から４まで変わるものと考え，$x_4 = ict$ とする．Lagrangeの方程式（12－23）はこの変更によって影響を受けないことに注目しよう．実際，

$$\frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\right),$$

という項は，任意の x_ν のスケール変換によっては変化せず，また Lagrange の方程式の他の項は座標を全く含んでいない．さらに，空間の変更は，1つの定数の乗数を導入するのみであるから，(12－20) 式の Hamilton の原理による定式化には影響を与えない．

さて，場に関係したすべての量および関連する方程式はある確定したLorentz共変性をもっていなければならない．したがって場の量は，ある与えられた階数の世界テンソル ── 世界スカラー，世界ベクトル等 ── から構成されなければならない．原理的には，η_ρ はこれらの種類のテンソルのどれかに限定される必要はなく，そのようなもののある組，例えば2つの世界スカラー，を表わすこともできる．ラグランジアン密度およびハミルトニアン密度も，また共変的でなければならない．Hamilton の原理において，4次元空間の体積要素 (dx_ν) は Lorentz 変換の下で不変でなければならない．通常，作用 I がスカラーとして考えられるので，このことはラグランジアン密度（したがって $\mathscr{H}$）は世界スカラーでなければならないことを意味する．すなわち，ラグランジアン密度およびハミルトニアン密度は，世界スカラーを形成するような具合に，場の量の（場合によっては外部の共変量をも含んだ）関数になっていなければならない．このことから，(12－34) 式で定義される応力・エネルギー・テンソル $T_{\mu\nu}$ は，自動的に2階の世界テンソルになることが導かれる．しかしながら，4次元空間を変えることは，$T_{\mu\nu}$ の成分の値が変わることを意味する．もちろん，T_{ij} は，ラグランジアン密度が同じであるとすれば，(t, x, y, z) から (x, y, z, ict) への切り
p.572
換えによっては影響されない．他の成分については，同じ条件の下で，(12－34) 式と (12－34′) 式から，対応は次のようになる．

$$\begin{aligned} &T_{44} \to T_{00}, \\ &T_{j4} \to icT_{j0}, \\ &T_{4j} \to -\frac{i}{c}T_{0j}. \end{aligned} \qquad (12-91)$$

ラグランジアン密度は，もちろん定数の乗数だけ不定である．T_{44}（またはその対称化された形）が直接に場のエネルギー密度を表わすようにその因子を選ぶのが慣例である．選ばれた4次元空間では，量 R_μ すなわち（12－36）式は，

$$R_\mu = \int T_{\mu 4}\, dV, \tag{12-92}$$

のように定義される．また，

$$P_\mu = \frac{i}{c} R_\mu, \tag{12-93}$$

で定義される関連する組 P_μ を考えよう．（12－91）式と T_{i0} について上で与えた解釈（792ページ参照）から，P_i は場の全線運動量を表わし，P_4 は $(iE)/c$ であるということが導かれる．ここで，E は場の全エネルギーである．これは，P_μ が場のエネルギー・運動量の相対論的世界ベクトルをなしていることを示唆する（590ページ参照）．しかしながら，まだ R_μ と P_μ がLorentz変換の下で，世界ベクトルのように変換されることを示さなければならない．この性質を証明するためには，共変形式における3次元空間における積分の意味はどのようなものであるかということ，および実際に積分限界は一般にどのように取り扱われるべきであるかについて調べてみなければならない．

積分限界の共変性が問題となる最初の例は，Hamiltonの原理においてである．（12－20）式においては，積分は明白に共変的な形で現われるが，（12－12）式から導びかれる積分限界は明白に共変的とはいえない．空間積分は3次元空間のある体積にわたって行われ，これに引き続いて t_1 と t_2 の間の時間についての積分が行われる．定まった t に対する V についての積分というのは共変的な概念ではない．なぜなら同時性（“一定の時刻”）ということは，Lorentz変換の下では必ずしも不変ではないからである．適切な共変的な記述の仕方は，**空間的**（space-like）な3次元の超曲面上で積分を行うことにするということである．空間的超曲面というのは，その中に存在せるすべての世界ベクトルが空間的である（578ページ参照）ような超曲面を意味する．そのような曲面に垂直なベクトルは時間的（time-like）である．時刻一定の超曲面上の2つの世界点を結ぶ任意のベクトルは確かに空間的である．なぜなら x_4 成分が

零となるからである．したがって，時刻一定の超曲面は空間的超曲面の１つの特別な例である．しかし，そのような超曲面はすべてのLorentz系でその性質を保持している．それは，ベクトルが空間的であるか時間的であるかという性質は，Lorentz 変換によっては影響を受けないからである．同じような仕方で，１つの座標系の固定点における t に関する積分がどのようなものであるかということは，時間的超曲面にわたる積分として共変的に記述することができる．

p.573
（物理的空間において）１次元の系に対しては，（12－12）式で与えられる Hamilton の原理の中の積分は，図 12－4 に示されている長方形に関する積分である．Lorentz 変換は Minkowski 空間における回転であって，長方形の辺は変換された空間内の軸に平行ではないであろう．しかし，すべての Lorentz 系で，積分は，２つの空間的超曲面の間に含まれ，それと相交わる時間的超曲面によって限られる４次元空間の中の１つの領域にわたるものとして記述することができる．

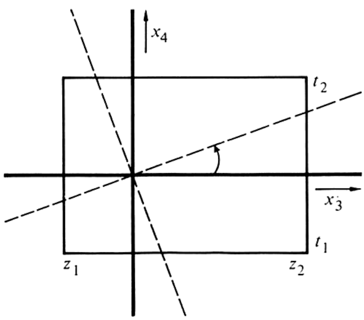


図 12－4
１次元的な拡がりだけを持つ系に対する Hamilton の原理における積分領域.

P_μ のような積分量に対してふさわしい共変的記述は，

$$P_\mu = \frac{i}{c}\int_S T_{\mu\nu}\, dS_\nu, \qquad (12-94)$$

のように与えられる．ここで積分は空間的超曲面上のある領域にわたって行わ

れる．このとき，超曲面に垂直な方向をもつ面積要素を表わすベクトルが dS_ν である．$T_{\mu\nu}$ は2階の世界テンソルであるから，上のように定義された P_μ は世界ベクトルであることは明らかである．しかし，ここで，(12－94)式で与えられる P_μ の成分は，もしその発散が零であるなら，すなわち(12－33)式を満たすなら，通常の3次元空間における体積積分に帰着されることを示すことができる．S_1 と S_2 は空間的であり，S_3 は時間的である(図12－5参照)とし，この3つの超曲面で定義される4次元空間の1つの領域を想像しよう．4次元の発散定理から，発散の体積積分は面積分によって置き換えることができる．すなわち，

$$\int_{V_4} \frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu}(dx_\nu) = \int_{S_1+S_2+S_3} T_{\mu\nu}\, dS_\nu\,, \qquad (12-95)$$

が成り立つ．S_3 に関する積分は $\mathbf{r}$ が一定の下での t に関する積分に対応する．この体積を十分拡げれば，この面上での積分はすべての場の量が零となる系の外側における $\mathbf{r}$ を含むようになるであろう．$T_{\mu\nu}$ の発散が零であることが仮定されているために左辺の積分もまた零となる．したがって，空間的超曲面の法線が同じ向きにとられるなら，

$$\int_{S_1} T_{\mu\nu}\, dS_\nu = \int_{S_2} T_{\mu\nu}\, dS_\nu\,, \qquad (12-96)$$

p.574
が成り立つ．もし S_1 が任意の空間的超曲面であり，S_2 は x_4 すなわち t が一定であるような特別な曲面であるならば，そのときには(12－96)式によって

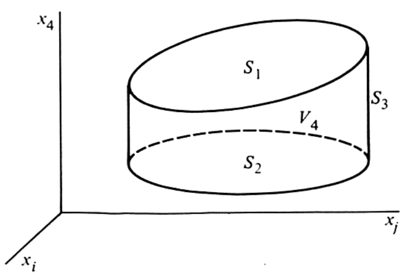


図 12－5
4次元空間における積分領域の図．

$$\int_{S_1} T_{\mu\nu}\, dS_\nu = \int T_{\mu 4}\, dV, \qquad (12-97)$$

となる．左辺が4元ベクトルの変換性をもつことは明らかである．したがって，右辺，すなわち(12－92)式によれば R_μ もまた4元ベクトルとして変換される．さらに，S_1 と S_2 の両方が共に t が一定，例えばそれぞれ t_1 と t_2，の超曲面であるならば，(12－96)式は，

$$R_\mu(t_1) = R_\mu(t_2),$$

と等価である．したがって，これは R_μ が時間的に保存されることを証明する共変的な方法である．

それゆえ，いくらか注意をはらえば，保存される積分量を古典場の相対論の枠の中で用いることができる．常に詳細な対応づけを行うことはしないが，大部分の場合には，体積積分は，空間的超曲面が t が一定である3次元空間の1つの領域であるような，特殊なLorentz系に関連するものであるとして十分である．角運動量密度に対しては，(12－46)式の $\mathscr{M}_{ij}$ の共変形式における対応する量は，3階の4元テンソル，

$$\mathscr{M}_{\mu\nu\lambda} = \frac{i}{c}(x_\mu T_{\nu\lambda} - x_\nu T_{\mu\lambda}), \qquad (12-98)$$

であることを注意しておこう．$\mathscr{M}_{\mu\nu\lambda}$ は μ と ν については反対称である．これに対応する大域的な量あるいは積分量は，

$$M_{\mu\nu} = \int \mathscr{M}_{\mu\nu\lambda}\, dS_\lambda, \qquad (12-99)$$

である．ここでは積分は空間的超曲面の上で行われる．もしLorentz系を，超曲面が t が一定であるように選ぶならば，そのときには，

$$M_{\mu\nu} \to \int \mathscr{M}_{\mu\nu 4}\, dV,$$

p.575
となって，これは前の定義に対応している．対称な応力・エネルギー・テンソルに対する M_{ij} の保存についての残りの議論は，特殊なLorentz系を考えることによって前と同じように行われる．

前節において構成されたような，ハミルトニアンを用いる定式化は，時間座標と空間座標をはっきりと区別している．このことは，それが必ずしも非相対論的であることを意味するのではなく，その定式化が明白に共変的ではないことを意味しているだけである．ハミルトニアンを用いる枠組は，各々特定の観測者によって測られる時間を用いて構築されているものと考えなければならない．場の量と，それから導かれる関数が適当な変換性をもつとすれば，各 Lorentz 系に対するこのような構成は特殊相対性を犯すものではない．

ここで指摘しておかなければならない，さらにもう１つのことがある．η_ρ が１組の共変的な場の量を表わすこと，を許すことによって，系は相互作用している２つまたはそれ以上の場から成り立っているという可能性を許すことになる．完全なラグランジアン密度は，自由場および場の間の相互作用を記述する項を表わすラグランジアン密度の和から成り立っていることもあろう．相対論的な質点の力学の困難の１つは，必然的に遠隔作用であることを意味する，粒子間の相互作用を考察する問題であったことが思い出されるであろう．しかしながら，場の間の相互作用は１点において起こり，したがって特殊相対性理論と矛盾しない．われわれは更に進んで，時空のある与えられた点における１つの場と１つの粒子の間の相互作用を取り扱うことができる．このように，連続的な場，不連続な粒子，およびそれらの間の相互作用から成っている１つの系を，相対論的に考察することが可能である．これが，特定の場合にどのように行われるかは次節で示されるであろう．そこでは相対論的な場の理論の例が与えられる．

12－6　相対論的な場の理論の例

順を追って複雑になっていく３つの例を論じることにしよう．

A．**複素スカラー場**（*complex scalar field*）任意の複素場は２つの独立な部分によって記述される．それらは場の実部および虚部，あるいは複素場それ自身とその複素共役によって表わすことができる．われわれは後の方の表わし方を用いることにする．したがって，ラグランジアン密度および関連する関数は，ここでは２つの独立な場の変数，ϕ と ϕ^* を用いて与えられる．その各々は

世界スカラーである*．この特別な例に対して，ラグランジアン密度として，

$$\mathscr{L} = -c^2\phi_{,\lambda}\phi^*_{,\lambda} - \mu_0^2c^2\phi\phi^*, \qquad (12-100)$$

を選ぼう．ここで μ_0 は定数である．要請されているように，$\mathscr{L}$ は世界スカラーであることに注意しよう．空間および時間変数を用いて表わせば，$\mathscr{L}$ は，

$$\mathscr{L} = \dot{\phi}\dot{\phi}^* - c^2\nabla\phi\cdot\nabla\phi^* - \mu_0^2c^2\phi\phi^*, \qquad (12-100')$$

p.576
と書くことができる．$\eta_\rho = \phi^*$ である場合の場の方程式を得るために，

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*_{,\nu}} = -c^2\phi_{,\nu}, \qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*} = -\mu_0^2c^2\phi,$$

であることに注意する．したがって，Lagrange-Euler の場の方程式は，

$$\phi_{,\nu\nu} - \mu_0^2\phi = 0, \qquad (12-101)$$

あるいは等価な形で，

$$\sum_\nu \frac{d^2\phi}{dx_\nu^2} - \mu_0^2\phi = 0, \qquad (12-102)$$

および，

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\phi}{dt^2} - \mu_0^2\phi = 0, \qquad (12-102')$$

となる．(前に 398 ページで定義した) ダランベルシャンを用いると，場の方程式は共変的に，

$$(\Box^2 - \mu_0^2)\phi = 0, \qquad (12-103)$$

と書くことができる．同様に，$\mathscr{L}$ の対称性から，$\eta_\rho = \phi^*$ のときに得られる場の方程式は，

$$(\Box^2 - \mu_0^2)\phi^* = 0, \qquad (12-103')$$

である．ϕ と ϕ^* によって満たされる基本的な場の方程式は，Klein-Gordonの方程式**として知られており，ここで与えられたように，静止質量 μ_0 の電荷をも

*) 次の節で見るように，複素場を用いると，自然にそれに付随した電荷および電流密度が出てくる．このことが，物理的な理論に複素場を導入する主な理由である．

**) 現代の文献の中には，(12－103) 式の形の Klein-Gordon の方程式は $\mu_0^2\phi$ の項をプラスの符号で与えているものがある．この理由は，(7－53) 式で与えられる計量を用い，それに対応してダランベルシアンの定義の符号を変えていることに由来する．演習問題 6 を見よ．

つスピン零の粒子に対するSchrödinger方程式と相対論的に対応する式を表わしている．

（12－34）式で定義された応力・エネルギー・テンソルは，成分，

$$T_{\mu\nu} = -c^2\phi_{,\mu}\phi^*_{,\nu} - c^2\phi^*_{,\mu}\phi_{,\nu}$$
$$+ c^2(\phi_{,\lambda}\phi^*_{,\lambda} + \mu_0^2\phi\phi^*)\delta_{\mu\nu}, \tag{12－104}$$

を持っており，明らかに対称である．ラグランジアン密度は，外側の世界と相互作用のない自由場を記述するので，$\mathscr{L}$はx_νを陽に含まない．そして，直接証明されるように，$T_{\mu\nu}$については，保存則（12－33）式が成り立つ．ハミルトニアンによる定式化を導入するためには，ある特定のLorentz系において時間座標と空間座標を区別しなければならない．このとき，（12－53）式によって，共役な運動量は，

$$\pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}^*, \qquad \pi^* = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}, \tag{12－105}$$

p.577
である．ハミルトニアン密度は（T_{44}と同じ大きさを持つが），

$$\mathscr{H} \equiv \pi\dot{\phi} + \pi^*\dot{\phi}^* - \mathscr{L},$$
$$= \pi\pi^* + c^2\nabla\phi\cdot\nabla\phi^* + \mu_0^2c^2\phi\phi^*, \tag{12－106}$$

の形をとることが導かれる．Hamiltonの運動方程式が，（12－105）式およびKlein-Gordonの方程式に帰着されることの証明は，演習問題に残しておこう．当面，ここでは運動量表示への変換を例で示すことだけを考えよう．(12－79)と（12－82）の2つの展開式をハミルトニアン密度に導入する．場が実ではないので，$q_k^* = q_{-k}$ではない．実際，q_kとq_k^*は2組の独立なとびとびの座標の組を表わしており，1つはϕを他はϕ^*を表わしている．全ハミルトニアンは（12－106）式の3つの項の体積積分の和である．典型的な例として，

$$\mu_0^2\int\phi\phi^*\,dV = \frac{\mu_0^2}{V}\sum_{k,k'}\int q_k q_{k'}^*\,e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}\,dV,$$

を考えよう．これは（12－80）式によって，

$$\sum_k \mu_0^2 q_k q_k^*,$$

となる．少しでも特別な注意を必要とする唯一の他の項は発散を含む項である．この項は被積分関数に $(i\mathbf{k})\cdot(-i\mathbf{k}')$ という因子を導入することになる．H の最終的な形は，

$$H=\sum_k\left(p_kp_k^*+\omega_k^2q_kq_k^*\right), \qquad (12-107)$$

と書くことができる．ここで，

$$\omega_k^2=c^2k^2+\mu_0^2, \qquad (12-108)$$

である．(12－107)式の和の各項は，振動数 ω_k を持つ単位質量の調和振動子の形である．このことは，Hamiltonの運動方程式(12－89)および(12－90)式を計算することによってはっきりわかる．運動量表示すなわち平面波表示では，場 ϕ および ϕ^* は，有限な固体の中での音波の場が，“フォノン”(phonon)の集合とみなされるのと同様に，個々の調和振動子の系によって置き換えられる．われわれの考えている荷電スカラー場の“振動”の不連続なスペクトルは，(12－108)式によって与えられる．場の量子化(いわゆる第2量子化)は，運動量表示を用いることによって最も容易に行うことができる．実際，各々の調和振動子の運動は，実際の調和振動子に対してなされたように，量子化される．しかし，この主題は確かにわれわれの取り扱う範囲を超えるものである．

B　**Sine-Gordon 方程式とそれに従う場**．もし上の例のスカラー場が実(すなわち $\phi=\phi^*$)で，また空間の次元が1次元，時間が1次元の2次元時空においてだけ存在するものとすれば，そのときには，(12－100′)式のモデルに沿った対応するラグランジアン密度は，明らかに，

p. 578

$$\mathscr{L}=\frac{c^2}{2}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{c^2}-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2-\mu_0^2\phi^2\right), \qquad (12-109)$$

となるであろう($\frac{1}{2}$という因子は便宜上導入されている．明らかにこの因子は運動方程式の形に影響しない)．これに結びつけられる場の方程式は，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\mu_0^2\phi, \qquad (12-110)$$

である．これは1次元のKlein-Gordonの方程式である．これは場 $\phi(x,t)$ について線形であることに注意せよ．

（12－109）式のラグランジアン密度を，

$$\mathscr{L}=\frac{c^2}{2}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{c^2}-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right)-\mu_0^2c^2(1-\cos\phi), \qquad (12-111)$$

の形のラグランジアン密度において場が小さいときの近似とみなすことができる．このラグランジアン密度に対応する場の方程式は，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\mu_0^2\sin\phi\,, \qquad (12-112)$$

となる．特に意味があったわけではないとしても，（12－112）式は必然的にsine-Gordonの方程式として知られるようになった．もしKlein-Gordonの方程式（11－110）が調和振動子を思い起こさせるとするなら，ラグランジアン（12－111）式の“ポテンシャル”項は線形振子のポテンシャル項を思い出させるものである．事実，（12－112）式は，もっと適当であろうが，振子の方程式とも呼ばれてきた．

この1次元の世界では，応力・エネルギー・テンソルは4つの成分のみを持っている．再び，x と t は $\mathscr{L}$ の中に陽には現われないから，テンソルの成分は保存方程式を満たし，その数はここでは2つである．詳しいことは演習問題に残しておこう．しかし，特に関心があるのは，エネルギー密度 T_{44} である．

$$T_{44}=\frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2+c^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right)+\mu_0^2c^2(1-\cos\phi).$$

これはもちろん，ハミルトニアン密度

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\left(\pi^2+c^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right)+\mu_0^2c^2(1-\cos\phi), \qquad (12-113)$$

と同じ大きさである．ここで共役な運動量は，

$$\pi(x,t)=\dot{\phi},$$

である．

p.579

調和振動子についての和としてのKlein-Gordonの場に対する運動量表示は，

1次元の場合には，場が，

$$q_k(t)\,e^{ikr} = A_0(k)\,e^{i(kr-\omega_k t)},$$

の形の平面波の重ね合わせとして作り上げられることを意味する．ここで，k と ω_k は**分散関係**（*dispersion relation*）（12－108）式によって関係づけられている．sine-Gordon方程式に従う場に対しては，$\mathscr{H}$ の中に $\cos\phi$ の項があるため，運動量表示を適用することはずっと難かしい．しかしそれでも，進行波と似たものを用いてsine-Gordon方程式を解くことができる．速さ v で進んで行き，その形がくずれないような擾乱の形をしている（12－112）式の ϕ に対する解は，$\tau = t - x/v$ のみの関数でなければならない．その場合，(12－112)式は，

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} - A\sin\phi = 0,$$

となる．ここで，

$$A = \frac{\mu_0^2 c^2 v^2}{c^2 - v^2}, \qquad (12-114)$$

である．変数 τ を用いると，運動方程式は実際に有限の振幅をもつ単振子に対する運動方程式である．非常に小さい振幅に対しては，ϕ は τ についての単振動であって，振幅に無関係で波数 $k = \omega/v$ に対する，（12－108）式で与えられる ω をもっている．有限な振幅のときには，振子の運動を調べてみると，ϕ はやはり周期的ではあるが，振動数 ω は振幅にも依存するであろうことが知られる．すなわち，分散関係は振幅に依存するであろう．これはもちろん非線形方程式の特徴であって，sine-Gordonの方程式はその1例である．Klein-Gordonの方程式は線形であるが，分散関係（12－108）式は非線形であるといわれる．すなわち ω_k は k の1次関数ではない．それは $\mu_0 \to 0$ のときにのみ1次関数になり，そのときKlein-Gordonの方程式は通常の線形波動方程式になる．

このように，sine-Gordon方程式を，振幅に依存する非線形な分散関係をもつ非線形な方程式であるとして記述することができる．さらに調べてみると，

sine-Gordon の方程式は 2，3 の他の非線形方程式のみが共有しているいくつかの性質をもつ解を持ち得ることが明らかになる．これらの解は進行波の形の擾乱であって，互いに相互作用をすることができ —— 互いに通り抜けることができ —— そして恐らくは位相のずれを除いては形を変えないで再び姿を現わすことができるようなものである．そのような解は，例えば非線形の Korteweg-de Vries 方程式，

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\alpha\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}+\nu\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}=0, \qquad (12-115)$$

についても見出されている．ここで α と ν とは定数である．相互作用があってもその形を変えない孤立波は “ソリトン”(soliton) と名付けられるが，その応用範囲は素粒子物理学から固体物理学にいたるまでの，物理学の到る処でひろ
p.580
がりつつある．例えば振子の sine-Gordon 方程式は，素粒子の族を記述するのに用いられ，また Josephson 接合の理論との関係においても現われている．

C．**Dirac 粒子の古典場**．　ここでは場は 2 つの配列，ψ と $\psi^\dagger$ に現われている 4 つの複素スカラー量から構成される．ここでの目的のためには，ψ は 4 個の要素の 1 列行列と考えられ，$\psi^\dagger$ は ψ の随伴行列と考えられる．適当なラグランジアン密度は，

$$\mathscr{L}=i\psi^\dagger\gamma_\mu\psi_{,\mu}+m\psi^\dagger\psi, \qquad (12-116)$$

である．ここで m は（ある単位で表わされた）粒子の質量に等しい定数であり，γ_μ は 4 個の 4×4 Dirac 行列の組である．この γ_μ は，第 4 章で用いられた（204 頁の最初の式参照）Pauli の 2×2 行列 σ_i の一般化されたものである*．したがって場は，ψ に対して 4 個および $\psi^\dagger$ に対して 4 個の合計 8 個の成分を持っている．もし ψ_λ が ψ の 1 つの要素を表わし，また $\psi^\dagger_\nu$ が $\psi^\dagger$ の 1 つの要素を表わすとすれ

*）2×2 行列の行列として表わすならば，Dirac 行列は，

$$\gamma_i=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_i\\ -\boldsymbol{\sigma}_i & \mathbf{0}\end{pmatrix},\qquad \gamma_4=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{pmatrix}, \qquad (12-116')$$

と定義される．古典場の例として $\psi,\psi^\dagger$ を示すためには，この陽な表現は必要ではない．

ば，(12－116) 式における$\mathscr{L}$は，

$$\mathscr{L} = i\psi_\nu^\dagger(\gamma_\mu)_{\nu\lambda}\psi_{\lambda,\mu} + m\psi_\nu^\dagger\psi_\nu,$$

のように展開された形に書くことができる．ここで $(\gamma_\mu)_{\nu\lambda}$ は γ_μ の $\nu\lambda$ 要素である．しかしながら，ψ と $\psi^\dagger$ に対して終始行列記法を用いる方がより一層便利であってかつあいまいさも生じない．

$\mathscr{L}$は $\psi^\dagger{}_{,\mu}$ を含まないから，$\psi^\dagger$ 変数に対する Euler-Lagrange の方程式は特に簡単に得られて，

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^\dagger} = i\gamma_\mu\psi_{,\mu} + m\psi = 0, \qquad (12-117)$$

となる．ψ 変数に対しても，対応する Euler-Lagrange の方程式は殆ど同じくらい簡単な形，

$$\frac{d}{dx_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{,\mu}}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi} = i\psi^\dagger{}_{,\mu}\gamma_\mu - m\psi^\dagger = 0, \qquad (12-118)$$

となる．(12－117) 式は，有名な Dirac の波動方程式を構成し，(12－118) 式はその随伴形に対応している．

形式的な応力・エネルギー・テンソルは，容易に，

$$T_{\mu\nu} = i\psi^\dagger\gamma_\nu\psi_{,\mu} - \mathscr{L}\delta_{\mu\nu},$$

であることが見出され，これは ψ と $\psi^\dagger$ に対する行列としての陽な表現から直接証明することができる．しかしながら，$T_{\mu\nu}$ は表わされているように対称ではない　さらに，$\mathscr{L}$は場の量の時間に関する導関数について高々 1 次であるから，
p.581
第 12－4 節のハミルトニアンによる定式化は行うことができない．すなわち，π は $\dot{\psi}$ または $\dot{\psi}^\dagger$ のどちらかを含まず，質点の力学におけるように，時間に関する導関数を消去するために定義式を逆に解くことはできないのである．この Dirac 場は，他の興味ある側面を持っているが，それはこの節の終りの所および次の節ででてくるであろう．

D．**電磁場**．力学系に基づいて作られたのではない，古典場のもっともなじみ深い例は，多分電磁場であろう．しかしその定式化は，すでに考察された例

よりもかなり複雑であり，時にはあいまいな点を含んでいる．われわれはここではすべての詳細な結果に立ち入ることはできないが，興味を引くいくつかの部分に触れてみることにしよう．

Maxwellの方程式（1－60）は，微視的な形では（すなわち巨視的な媒質の中ではないときには），2つの同次方程式，

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{12-119}$$

と，2つの非同次方程式，

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}, \tag{12-120}$$

から構成されている．同次方程式は，**E**と**B**が，合わせて4元ベクトルA_μを形成するスカラー・ポテンシャルϕとベクトル**A**を用いて表わされることを意味する．しかしながら，（1－62）と（1－63）式はA_μと$(\mathbf{E}, \mathbf{B})$の間の関係を定義してはいるが，それらはポテンシャルの値を完全には定めない．実際，A_μは任意のスカラー関数の4元勾配の範囲で不定である．付加的な条件，**ゲージ条件**（*gauge condition*）が付け加えられなければならない．われわれの考察では，大抵の場合，ゲージを陽に定める必要はない．特定のゲージ条件が必要となるときにはいつでも，Lorentz ゲージが用いられるであろう（398ページ参照）．Lorentz ゲージは，波動方程式を特に簡単な形に導き，またそれは明らかに共変的な形，

$$\frac{dA_\mu}{dx_\mu} = 0, \tag{12-121}$$

に述べることができる．

（1－62）と（1－63）式は，

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}, \tag{12-122}$$

で定義される2階の反対称世界テンソル，すなわち**場のテンソル**（*field tensor*）$F_{\mu\nu}$を用いて共変的に表わすこともできる．A_μにおけるゲージの不確定さは，Λを任意のスカラー関数とすれば，

$$\frac{d\Lambda}{dx_\mu} \equiv \Lambda_{,\mu} \tag{12－123}$$

p. 582
を，$F_{\mu\nu}$の値を変えることなしに，A_μに付け加えることができる，という事実に現われている．明らかに$F_{\mu\nu}$は，ベクトルA_μの1種の4次元回転である．純粋に空間的な要素F_{ij}は事実ベクトル$\mathbf{A}$の回転の成分であり，したがって$\mathbf{B}$を用いて与えられる．要素F_{4j}に対しては，(1－63)式によって，

$$F_{4j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_j} = -\frac{i}{c}\frac{\partial A_j}{\partial t} - i\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = iE_j,$$

が得られる．したがって，場のテンソルの完全な形は，

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12－124}$$

である．

同次方程式(12－119)式は，$F_{\mu\nu}$によって恒等的に満足されるであろうことが期待される．なぜならポテンシャルは，これらの方程式から導びかれたものであるからである．実際，(12－119)式が4つの方程式，

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0, \quad (\text{和はとらない！}) \tag{12－125}$$

の形に書けることを見るのは難かしいことではない．ここでμ, ν, λは4つの指標からとられた任意の3つのサイクリックな組である* (μ, ν, λを1, 2, 3と取ったときにはこれは明らかに$\nabla \cdot \mathbf{B}$の方程式となる)．しかしA_μを用いると，(12－125)式は恒等的に成り立つ．それは，(12－125)式は，

$$A_{\nu,\mu\lambda} - A_{\mu,\nu\lambda} + A_{\mu,\lambda\nu} - A_{\lambda,\mu\nu} + A_{\lambda,\nu\mu} - A_{\nu,\lambda\mu} = 0,$$

と書くことができるからである．この式は1対の項ごとに打ち消し合うことに

---

*) (12－125)式はもっと経済的に(和の規約を用いて)，

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{12－125'}$$

と書くことができる．ここで$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$は4次元の順列記号である(225ページ参照)．

よって零になる．したがって場を源によって定義し，かつ場の方程式としてみなされなければならないのは非同次方程式の方だけである．場のテンソルを用いて，(12－120) 式は，

$$\frac{dF_{\mu\nu}}{dx_\nu} = \frac{4\pi j_\mu}{c}, \qquad (12-126)$$

と書くことができる．ここで，前と同じように，j_μは4元ベクトル$(\mathbf{j}, i\rho c)$である．例えば (12－126) 式は，$\mu = 4$ のとき明らかに $\nabla\cdot\mathbf{E}$ の方程式になる．(12－125) と (12－126) 式は合わせて，共変形の Maxwellの方程式である．電磁場のラグランジアンによる定式化を求めるときには，(12－125) 式は定義によって満足されているので，(12－126) 式のみに注目すればよい．

p.583
もし，ポテンシャルの成分 A_μが場の量として取り扱われるならば,* 電磁場に対して適切なラグランジアン密度は，

$$\mathscr{L} = -\frac{F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}}{16\pi} + \frac{j_\lambda A_\lambda}{c}, \qquad (12-127)$$

である．Euler-Lagrangeの方程式を得るために，

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\mu} = \frac{j_\mu}{c}\ ; \qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = -\frac{F_{\lambda\rho}}{8\pi}\frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial A_{\mu,\nu}},$$

であることに注意しよう．さて，(12－122) 式の定義から，$F_{\lambda\rho}$の導関数は $\lambda = \mu, \rho = \nu$ および $\lambda = \nu, \rho = \mu$ であるときを除いては零になる。それゆえ，

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = \frac{F_{\mu\nu}}{8\pi} - \frac{F_{\nu\mu}}{8\pi} = \frac{F_{\mu\nu}}{4\pi}, \qquad (12-128)$$

が得られ，Euler-Lagrangeの方程式は，

$$\frac{1}{4\pi}\frac{dF_{\mu\nu}}{dx_\nu} - \frac{j_\mu}{c} = 0,$$

となって，これは (12－126) 式と同じである.†

---

*) 電磁場を取り扱うときの困難の一部は，成分 A_μが完全には独立でない ── すなわち一義的にするには (12－121) 式のようなあるゲージ条件によって，それらを結びつけなければならない ── という事実から生じてくる．しかし，ゲージ条件を433ページの意味での"弱い"束縛条件として取り扱えば，現在の目的には十分であろう．

†) (12－127) 式の$\mathscr{L}$ の中の第2項は文献の中でしばしばマイナスの符号で表われる．これは4次元空間で異なる計量を用いた結果である．後の演習問題13を見よ．

（12－127）式のラグランジアン密度は，明らかに自由場の項と，電流密度の4元ベクトルを用いた外界との相互作用を記述する項との和の形をしている．したがって一般に$\mathscr{L}$は，電荷および電流の空間と時間に対する依存性を通してx_μの陽な関数になるであろう．よって自由場の場合に対してのみ，応力・エネルギー・テンソルを用いた保存電流が存在するであろう．したがって，応力・エネルギー・テンソルについての議論は自由場に限られることになるであろう．（12－128）式から$T_{\mu\nu}$は，

$$T_{\mu\nu} \equiv A_{\lambda,\mu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\lambda,\nu}} - \mathscr{L}\delta_{\mu\nu} = \frac{A_{\lambda,\mu}F_{\lambda\nu}}{4\pi} - \mathscr{L}\delta_{\mu\nu},$$

となることが導かれる．この形では$T_{\mu\nu}$は対称でない．しかし，これから和$A_{\mu,\lambda}F_{\lambda\nu}$を含む項を引き算すれば，対称な形，

$$\hat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{A_{\mu,\lambda}F_{\lambda\nu}}{4\pi} = -\frac{F_{\lambda\mu}F_{\lambda\nu}}{4\pi} - \mathscr{L}\delta_{\mu\nu}, \qquad (12-129)$$

p.584
が得られる．この手続きは，前に注意したように，付加される項が794ページで述べられたような特別な形をしているときにのみ，保存則あるいは積分量に対して影響を与えない妥当な手続きである．この項が，その処法に適合していることを見るために，

$$A_{\mu,\lambda}F_{\lambda\nu} = \frac{d}{dx_\lambda}(A_\mu F_{\lambda\nu}) - A_\mu\frac{dF_{\lambda\nu}}{dx_\lambda},$$

であることに注意しよう．しかし，外部電流がないときには，（12－126）式によって，

$$\frac{dF_{\lambda\nu}}{dx_\lambda} = -\frac{dF_{\nu\lambda}}{dx_\lambda} = 0,$$

が成立する．さらに，$A_\mu F_{\lambda\nu} = -A_\mu F_{\nu\lambda}$であるから，対称化するための項は実際に必要とされる反対称性を持つ量の4元発散である．

さて，$\hat{T}_{44}$を考えよう．これはエネルギー密度であるはずである．（12－129）式によって，

$$\hat{T}_{44} = -\frac{F_{\lambda 4}F_{\lambda 4}}{4\pi} + \frac{F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}{16\pi},$$

となる．場のテンソルの陽な形から，$F_{\lambda 4}F_{\lambda 4} = -E^2$ および $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ が $2(B^2 - E^2)$ に等しいことがわかる．後者はちょうどテンソルのすべての項の２乗の和である．したがって，

$$\hat{T}_{44} = \frac{E^2}{4\pi} + \frac{B^2 - E^2}{8\pi} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}, \tag{12－130}$$

となる．これは電磁場のエネルギー密度に対する通常の式である．（12－91）式から，また $ic\hat{T}_{4j}$ はエネルギー束密度のベクトルの成分になるだろうことが予想される．例えば，

$$ic\hat{T}_{41} = -ic\frac{F_{\lambda 4}F_{\lambda 1}}{4\pi} = -\frac{ic}{4\pi}(iE_2B_3 - iE_3B_2),$$

すなわち，

$$ic\hat{T}_{41} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_1,$$

を考えよう．これは電磁場のエネルギーの流れに対する通常の Poynting のベクトルの第１の成分である．$\hat{T}_{\mu\nu}$ の残りの成分もまた，章末の演習問題で示されるように，電磁場の性質のなじみ深い解釈と一致している．対称な形の代わりに $T_{\mu\nu}$ が用いられたならば，エネルギー密度もエネルギー束密度も通常の形を持たない．しかし，体積あるいはそれを囲む面についての積分量は同じままであって，これらが結局観測される量である．

さらに 2, 3 の点について注意しておこう．ラグランジアン密度は，$F_{\lambda\rho}$ を展開することによって，A_μ を用いて直接に表わすことができる．（12－122）式から，

$$F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho} = 2(A_{\rho,\lambda}A_{\rho,\lambda} - A_{\lambda,\rho}A_{\rho,\lambda}),$$

p.585
が得られる．しかし，括弧の中の第２項はさらに変形することができて，

$$A_{\lambda,\rho}A_{\rho,\lambda} \equiv \frac{dA_\lambda}{dx_\rho}\frac{dA_\rho}{dx_\lambda} = \frac{d}{dx_\rho}\left(A_\lambda\frac{dA_\rho}{dx_\lambda}\right) - A_\lambda\frac{d}{dx_\lambda}\left(\frac{dA_\rho}{dx_\rho}\right),$$

となる．１番右側の式の第１項は，面上で A_λ が零になるようなある面上での面積分に導かれる４元発散であるから，作用積分にはなんの寄与もしない．またもし，Lorentz ゲージ（12－121）式を仮定すれば，残りの項は恒等的に零になる．したがって，**Lorentz ゲージに対しては，**ラグランジアン密度は，

$$\mathscr{L}' = -\frac{A_{\mu,\nu}A_{\mu,\nu}}{8\pi} + \frac{j_\mu A_\mu}{c}, \qquad (12-131)$$

と等価である．このラグランジアン密度に対して，Euler-Lagrange の方程式に現われる項は，

$$\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial A_{\mu,\nu}} = -\frac{A_{\mu,\nu}}{4\pi}, \qquad \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial A_\mu} = \frac{j_\mu}{c},$$

である．したがって，(12－131) 式から場の方程式，

$$\Box^2 A_\mu + \frac{4\pi j_\mu}{c} = 0,$$

が得られる．これは，Lorentz ゲージを用いたときの，４元ポテンシャルに対するよく知られた波動方程式 (7－81) である．

最後に，電磁場に対する $\mathscr{L}'$ (12－131) 式は，自由場のラグランジアン密度と，連続な電荷および電流密度の場との相互作用を記述する項の和から構成されていることはすでに注意した．電荷を１点にまで局所化することによって，場と粒子との相互作用を導入することに関して，どこまで議論をすすめられるかを見てみたいという誘惑に駆られる．このことは，ある特別の Lorentz 系において，すなわち特別な観測者から見たときに，物理的な状況はどうなるかを考察することによって最も容易に行われる．明白な共変性はそうすることによって放棄されるが，その結果は，明らかに相対論的な理論から導かれるので，やはり特殊相対性理論に適合している．電流密度は，電荷の運動の１つの目安であって，与えられた任意の系に対して，$\mathbf{j}$ は電荷密度 ρ を用いて，関係式，

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t),$$

によって定義される．ここで $\mathbf{v}$ は連続な電荷分布の速度“場”である．電荷の局所化は，よく知られた Dirac の δ- 関数を用いて行うことができる．δ- 関数は，３次元の形では，もし $f(\mathbf{r})$ が空間の任意の関数であるならば，

$$\int dV f(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{s}(t)) = f(\mathbf{s}),$$

p.586

であるという性質を持っている．ここで $\mathbf{s}(t)$ は，例えば時刻 t における粒子の

空間的位置である（ s が積分領域の中にある限り）．このようにして，点 s にある電荷 q の粒子に対応する空間的電荷密度と電流密度は，

$$\rho = q\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}),$$

および，

$$\mathbf{j} = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s})\mathbf{v}(\mathbf{r}),$$

で表わされる．（12－127）式の$\mathscr{L}$を自由場の項 $\mathscr{L}_0$ と相互作用の項の和の形に書けば，与えられたLorentz系で見たときのラグランジアンは，

$$L = \int dV \mathscr{L}_0 - \int dV \rho\phi + \frac{1}{c}\int dV \mathbf{A}\cdot\mathbf{j}$$

$$= \int dV \mathscr{L}_0 - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}, \qquad (12-132)$$

である．（12－132）式の相互作用の項は，電磁場の中での1個の粒子のラグランジアンに対する（7－141）式における相互作用の項と全く同じである．このことは，粒子と場の系全体に対して，（7－141）式に類似した，

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} + \int dV\mathscr{L}_0, \qquad (12-133)$$

のような単一のラグランジアンが形成されるということを示唆している．このラグランジアンからは，場のテンソルあるいはポテンシャルの関数と考えると，場の方程式が導かれ，また粒子の座標の関数と考えると，粒子の運動方程式が導かれる．連続な場と，とびとびに存在する粒子とに対する力学的な記述は，実質的に共通の定式化によって表わされ，一翼の下に収められた！

場と粒子の相互作用を共変的に記述することは，自由粒子に対する共変的なラグランジアンを探すときに第7－9節で経験したのと同じ困難に出会うことになる．もし，粒子それ自身が（相対論的量子力学におけるように）場によって記述されるならばずっと簡単になる．というのは，場と場の相互作用は，自然に共変的な描像に合致するからである．このように，前の例で示された通り，複素Dirac場は，スピン$\frac{1}{2}$を持つ1個の電子の相対論的量子力学における表現である．Diracの理論においては，

$$j_\mu = -q\psi^\dagger\gamma_\mu\psi, \qquad (12-134)$$

によって与えられる電荷電流密度の4元ベクトルがあり，したがって，相互作用のラグランジアン密度は，

$$\frac{j_\mu A_\mu}{c} = -\frac{q}{c}\psi^\dagger\gamma_\mu A_\mu\psi\,, \qquad (12-135)$$

p.587
である．2つの場とそれらの相互作用に対する完全なラグランジアン密度は，Lorentz ゲージに対して，

$$\mathscr{L} = -\frac{A_{\mu,\nu}}{8\pi} - \frac{q}{c}\psi^\dagger\gamma_\mu A_\mu\psi + i\psi^\dagger\gamma_\mu\psi_{\,,\mu} + m\psi^\dagger\psi, \qquad (12-136)$$

の形になる．場の変数として $\psi^\dagger$ をとると，結果として得られる場の方程式は，

$$i\gamma_\mu\psi_{\,,\mu} - \frac{q}{c}\gamma_\mu A_\mu\psi + m\psi = 0\,, \qquad (12-137)$$

あるいは，

$$\gamma_\mu\left[i\frac{d}{dx_\mu} - \frac{q}{c}A_\mu\right]\psi + m\psi = 0, \qquad (12-137')$$

と書くことができる．これが電磁場のあるときのDirac方程式である．(12－137′)式の括孤の中の式はなじみのある形になっている．それは，微分演算子の i 倍は（ここで使われている $\hbar = 1$ とする記法では）運動量演算子の波動力学的表現であり，したがってこの括孤の中の式は，すでに何度も出会ったことのある，$p_\mu - (q/c)A_\mu$ という式のDiracの量子力学における対応物だからである．場の変数として A_μ をとると，場の方程式は，

$$\square^2 A_\mu = \frac{4\pi q}{c}\psi^\dagger\gamma_\mu\psi, \qquad (12-138)$$

となる．これはDirac場と相互作用している電磁ベクトル・ポテンシャルの波動方程式である．

現代物理学におけるかなり多くの分野では，いろいろな型の素粒子を表わすための場を構成することに関心が向けられている．もちろん，すべてのそのような理論は量子力学的なものであるが，量子論的な場の理論の多くの特徴は，

付随するもの，すなわち，殆ど対応する古典的な対応物を持っているであろう．可能なラグランジアン密度およびいろいろな粒子に対する相互作用の項を構成するための，先験的に与えられる物理的な指導原理は殆どない。これらの関数に対するいいくつかの制約は共変性という制限から生ずるものである．例えば，$\mathscr{L}$ の中の項は，場とその他の量を組み合わせて，世界スカラーを作るようになっていなければならない．また，高階の導関数をもつラグランジアン密度も調べられてはいるけれども，通常，$\mathscr{L}$ は場の量とそれらの1階の導関数を含むように制限されている(演習問題8参照)．陰にラグランジアンの中に含まれる，保存性や不変性によっても項の形に対する付加的な要請が与えられたり示唆されたりする．これらの性質は，応力・エネルギー・テンソルに含まれる保存条件以上のものであり，通常 Noether の定理として知られる強力な手順を応用するときに見出されるものである．Noether の定理は次節の主題をなしている．

p.588
12−7　Noether の定理*

繰り返し議論される1つのテーマは，ラグランジアン(あるいはハミルトニアン)の対称性は，保存量が存在することを意味するということであった．このように，もしラグランジアンが変位を表わす特定の座標を陽に含んでいないならば，対応する正準運動量は保存される．座標に陽に依存しないということは，その座標の値を変えるような変換によって，ラグランジアンが影響されないことを意味する．そのとき，ラグランジアンは与えられた変換の下で不変である，または対称であると言われる．同様に，時間をずらす変換の下でラグランジアンが不変であることは，エネルギーが保存されることを意味する．不変性あるいは対称性と，保存量との間の関係の形式的な記述は，Noether の定理の中に含まれている．この定理が最も洗練され，かつ実り多い形になるのは，4次元空間における古典的な場の理論においてである．そういう理由から，この定理は不連続的な系に対しても適用できるけれども，定理の表立った議論は場を取

*) Emmy Noether, 1882−1935, は今世紀の指導的数学者の1人であるが，まさに“最も偉大な女性数学者”と言われている通りである．Noether の定理は，*Nachrichten Gesell. Wissenschaft.* Göttingen **2**, 235 (1918) にはじめて発表された．Noether については，C. H. Kimberling, *Am. Math. Monthly* **79**, 136 (1972) の論文を見よ．

り扱うときまで残しておいたのである．

座標変換の下での対称性は，

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \qquad (12-139)$$

の形の無限小変換の効果に関するものである．無限小変化 δx_μ は他のすべての x_ν の関数であってよい．Noether の定理はまた，場の量の変換の効果をも考察している．この変換は，

$$\eta_\rho(x_\mu) \to \eta'_\rho(x'_\mu) = \eta_\rho(x_\mu) + \delta\eta_\rho(x_\mu), \qquad (12-140)$$

によって表わされるものである．ここで，$\delta\eta_\rho(x_\mu)$ は x_μ と η_ρ の変化の両方の効果を測るものであって，すべての他の場の量 η_λ の関数であってもよい．x_ν 空間における特定の点における１つの場の変数の変化は，異なった量 $\bar{\delta}\eta_\rho$，

$$\eta'_\rho(x_\mu) = \eta_\rho(x_\mu) + \bar{\delta}\eta_\rho(x_\mu), \qquad (12-141)$$

であることに注意しよう．変換されていない量からの無限小の変化を用いて変換を記述しているということは，取り扱われているのは連続変換のみであることを示している．したがって，３次元における空間反転の下での対称性（パリティー対称性）は，Noether の定理を適用できる対称性の１つではない．座標と場の量の両方の変換の結果として，一般にラグランジアンは，場の変数および時空座標の両方の関数としては異なったものとなり次のようになる．

$$\mathscr{L}(\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu) \to \mathscr{L}'(\eta'_\mu(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu). \qquad (12-142)$$

ここで述べようとするNoetherの定理の記述の仕方は，最も一般的な形では
p. 589 ないが，定理の適用範囲をひどく制限はしない，すなわち結論の有用性をそこなわないで，導出を容易にするようなものである．次の３つの条件が成立するものと仮定しよう．すなわち，

1.　４次元空間はユークリッド的である．この要請はなくてもよいが，ここでは簡単のために仮定する．このことは，相対論的時空を Minkowski 空間に制限する．それは複素ではあるがユークリッド的である．

2.　ラグランジアン密度は，もとの量に対するのと同じ関数形を，変換され

た量に対しても示す．すなわち，

$$\mathscr{L}'(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu) = \mathscr{L}(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu), \qquad (12-143)$$

である．この型の条件は，以前の保存量の議論にはでてこなかったものである．それは主として，考えられた変換の下ではこの条件が自動的に満足されたからである．変位によってサイクリック座標が変換されるときに，ラグランジアンの変数に対する関数関係は，この変換によってひき起こされた原点の移動によっては変わらない．しかし，現在の拡張された型の変換においては，上の条件を満たす対称性に対しては研究が必要になる．例えば，電磁場に対するラグランジアン密度として（12－127）式をとると，対応する自由場の場合は，A_μがゲージ変換を受けるときにその関数形を変えないが，他方（12－131）式に対してこれに対応する場合は明らかに形を変える．この場合両方のラグランジアン密度は共にA_μについてサイクリックではあるけれども上のようなことが起こるのである．（12－143）式によって表わされる要請は，**"形の不変性"**（*form-invariance*）として知られている．（12－143）式は，元の座標を用いて表わしても新しい座標を用いて表わしても，運動方程式は同じ形をもつことを保証していることも注意しよう．形の不変性の条件は，このことが成り立つ最も一般的な状況ではない．すなわち，元のラグランジアン密度と変換されたラグランジアン密度はそれから導出される運動方程式を変えないが，４次元発散だけは異なることができる．実際，そのような拡張された形の不変性の記述からNoetherの定理を導くことができる．なぜなら，４次元発散の項の体積積分は零になるからである．しかし，簡単のために（12－143）式の条件に限定することにしよう．

3. 作用積分の大きさは変換の下で不変である．すなわち，

$$I' \equiv \int_{\Omega'} (dx'_\mu)\mathscr{L}'(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu)$$
$$= \int_{\Omega} (dx_\mu)\mathscr{L}(\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu), \qquad (12-144)$$

であるとする．再び，これはサイクリック座標に対して前に述べた対称性を含

み，かつその拡張を表わしている．このラグランジアンは，サイクリック座標の並進によって数値的には変化しないし，また作用積分の値も変えない．（12－144）式は**スケール不変性**（*scale-invariace*）の条件と呼ばれる．このように，第2および第3の条件は，不連続的な系に対する保存量の存在に導く，対称性あるいは不変性の条件の一般化を表わしている．

（12－143）および（12－144）式を組み合わせると，

$$\int_{\Omega'} \mathscr{L}(\eta'_\rho(x'_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu)(dx'_\mu) - \int_{\Omega} \mathscr{L}(\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu)(dx_\mu) = 0\,,$$

p.590
という条件がでてくる．ここで，第1の積分における x'_μ は単にダミー変数を表わしているだけだから，x_μ と名前をつけ換えることができる．しかしながら，もちろん積分領域にはある変化が残り，それゆえ条件は，

$$\int_{\Omega'} \mathscr{L}(\eta'_\rho(x_\mu), \eta'_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu)(dx_\mu) - \int_{\Omega} \mathscr{L}(\eta_\rho(x_\mu), \eta_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu)(dx_\mu) = 0, \qquad (12-145)$$

となる．一連の空間の変換と積分領域の変換は，2次元空間に対して図12－6に示されている．（12－145）式は，(x_μ) 空間における作用積分において，元の場の変数を変換された量によって置き換え，また積分領域を変換するならば，その作用積分は不変のままであることを述べている．

（12－139）および（12－140）式の無限小変換の下で，（12－145）式の積

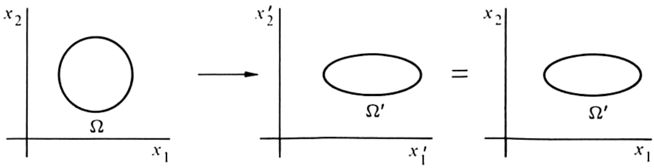


図 12－6
不変な作用積分の変換を示す図．

分の間の１次の差は２つの部分から成っている．１つはΩにわたる積分であり，もう１つは $\Omega'-\Omega$ という体積の差の上での積分である．１次元における例が，これらの項がどのようにして作られるかを示している．２つの積分の差を考えよう．すなわち，

$$\int_{a+\delta a}^{b+\delta b}[f(x)+\delta f(x)]\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b \delta f(x)\,dx+f(x)\,\delta x\Big|_a^b$$

$$=\int_a^b\left[\delta f(x)+\frac{d}{dx}(\delta x\, f(x))\right]dx, \quad (12-146)$$

を考える．小さい量の１次のオーダーに対して，右辺の最後の２つの項は，

$$\int_b^{b+\delta b} f(x)\,dx-\int_a^{a+\delta a} f(x)\,dx=\delta b f(b)-\delta a\, f(a),$$

と書くことができる．この近似では，（12－146）式は，

$$\int_{a+\delta a}^{b+\delta b}[f(x)+\delta f(x)]\,dx-\int_a^b f(x)\,dx \quad (12-147)$$

すなわち，

$$=\int_a^b \delta f(x)\,dx+\int_b^{b+\delta b}[f(x)+\delta f(x)]\,dx$$
$$-\int_a^{a+\delta a}[f(x)+\delta f(x)]\,dx, \quad (12-148)$$

p. 591
となる．（12－147）式に対応する多次元の式は，（12－145）式の不変性の条件が次の形をとることを述べている．

$$\int_{\Omega'}\mathscr{L}(\eta',x_\mu)(dx_\mu)-\int_\Omega\mathscr{L}(\eta,x_\mu)(dx_\mu)$$
$$=\int_\Omega[\mathscr{L}(\eta',x_\mu)-\mathscr{L}(\eta,x_\mu)](dx_\mu)$$
$$+\int_S\mathscr{L}(\eta,x_\mu)\,\delta x_\mu\, dS_\mu=0. \quad (12-149)$$

ここで，$\mathscr{L}(\eta,x_\mu)$ は完全な関数依存性を略記したものであり，S は（１次元の場合の端点 a，b に対応した）領域Ωの３次元の表面であって，δx_μ は実質的

には，曲面 S 上の点と変換された曲面 S' 上の対応する点の間のベクトルの差である（図 12－7 参照）．（12－148）式に対応して，最後の積分は 4 次元発散定理によって変形される．そうすると，不変性の条件に対して，

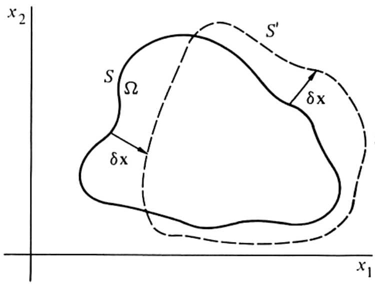


図 12－7
作用積分の変換に含まれる，2 次元の積分領域の図．

$$0=\int_\Omega (dx_\mu)\left\{[\mathscr{L}(\eta',x_\mu)-\mathscr{L}(\eta,x_\mu)]+\frac{d}{dx_\nu}(\mathscr{L}(\eta,x_\mu)\,\delta x_\nu)\right\}, \quad (12-150)$$

が得られる．さて，（12－141）式によって，角括孤の中の差の項は，1 次のオーダーまででは，

$$\mathscr{L}(\eta'_\rho(x_\mu),\eta'_{\rho,\nu}(x_\mu),x_\mu)-\mathscr{L}(\eta(x_\mu),\eta_{\rho,\nu}(x_\mu),x_\mu)$$
$$=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_\rho}\bar{\delta}\eta_\rho+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\bar{\delta}\eta_{\rho,\nu},$$

と書くことができる．$\bar{\delta}$ 変分の重要な性質は，それが（12－140）式の δ 変分とは違って）x_μ 空間における固定点での η の変化であるということである．したがって，$\bar{\delta}$ 変分は空間微分演算子と可換である．すなわち，

$$\bar{\delta} \quad と \quad \frac{d}{dx_\nu}$$

の順序は交換することができる．記号的には，

$$\mathscr{L}(\eta',x_\mu)-\mathscr{L}(\eta,x_\mu)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_\rho}\bar{\delta}\eta_\rho+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\frac{d\bar{\delta}\eta_\rho}{dx_\nu},$$

p.592
あるいは，Lagrangeの場の方程式を用いると，

$$\mathscr{L}(\eta', x_\mu) - \mathscr{L}(\eta, x_\mu) = \frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\bar{\delta}\eta_\rho\right).$$

と書くことができる．したがって，不変性の条件，(12－150) 式は，

$$\int (dx_\mu)\frac{d}{dx_\nu}\left\{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\bar{\delta}\eta_\rho + \mathscr{L}\,\delta x_\nu\right\} = 0, \qquad (12-151)$$

となって，これはすでに保存される流れの方程式の形になっている．

R個の無限小パラメーター ϵ_r，$r = 1, 2, \ldots, R$を用いて，無限小変換の形が，x_νと η_ρ の変化が ϵ_rに関して1次であって，

$$\delta x_\nu = \epsilon_r X_{r\nu}, \qquad \delta\eta_\rho = \epsilon_r \Psi_{r\rho}\,, \qquad (12-152)$$

のようなものである場合に，この条件をさらに展開しておくことは有用である．関数 $X_{r\nu}$ および $\Psi_{r\rho}$ はそれぞれ他の座標および場の変数に依存してもよい．もし変換の対称性が座標にのみ関係し，そして単一の座標 x_λ の変位に対応するならば，そのときにはこれらの関数は単に，

$$X_{r\nu} = \delta_{\nu\lambda}, \qquad \Psi_{r\rho} = 0\,, \qquad (12-153)$$

である．このようにして，(12－152) 式の形に含まれる変換は，われわれが今までに用いてきた対称性よりも更に広範なテストになる．(12－140) と (12－141) 式から，1次のオーダーまでとると，$\delta\eta$と $\bar{\delta}\eta$ は，

$$\delta\eta_\rho = \bar{\delta}\eta_\rho + \frac{\partial \eta_\rho}{\partial x_\sigma}\delta x_\sigma\,, \qquad (12-154)$$

によって関係づけられる．したがって，

$$\bar{\delta}\eta_\rho = \epsilon_r(\Psi_{r\rho} - \eta_{\rho,\sigma}X_{r\sigma})\,, \qquad (12-155)$$

となる．(12－152) と (12－155) 式を，不変性の条件 (12－151) 式に代入すれば，

$$\int \epsilon_r \frac{d}{dx_\nu}\left\{\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\sigma} - \mathscr{L}\;\delta_{\nu\sigma}\right)X_{r\sigma} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}}\Psi_{r\rho}\right\}(dx_\mu) = 0\,,$$

が得られる．パラメーター ϵ_rは任意であるから，微分保存則，

$$\frac{d}{dx_\nu}\left\{\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\sigma}-\mathscr{L}\;\delta_{\nu\sigma}\right)X_{r\sigma}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\Psi_{r\rho}\right\}=0\,,\qquad(12-156)$$

に従う R 個の保存する流れが存在する．(12－156) 式は，Noether の定理の主な結論を形成している．これは，もし，系が (すなわちラグランジアン密度が) (12－152) 式の型の変換に対して上の条件 (2) と (3) が成立するような対称性をもつならば，このとき R 個の保存量が存在することを述べている．

p.593

応力・エネルギー・テンソルの保存は，(12－151) 式の特別な場合として再び容易に得られる．もし，$\mathscr{L}$ が x_μ のうちのいずれをも含まないならば，$\mathscr{L}$，したがって作用積分は (12－153) 式のような変換の下で不変であるであろう．ここで λ は μ のすべての値をとる．そうすると，(12－156) 式は，

$$\frac{d}{dx_\nu}\left\{\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\sigma}-\mathscr{L}\;\delta_{\nu\sigma}\right)\delta_{\sigma\mu}\right\}=\frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_{\rho,\mu}-\mathscr{L}\,\delta_{\mu\nu}\right),$$

となって，これは (12－34) 式によって与えられる $T_{\mu\nu}$ を用いれば (12－33) 式と等価である．

他の多くの対称性が，(12－152) 式の形の変換によって表わされる．その中で最も興味のあるものは場の変数のみの変換の族であって，**第1種のゲージ変換***(*gauge transformations of the first kind*) と呼ばれるものである．それは

$$\delta x_\nu=0,\qquad \delta\eta_\rho=\epsilon c_\rho\eta_\rho\qquad(12-157)$$

(ρ についての和はとらない)

で表わされる．ここで c_ρ は定数である．もし，ラグランジアン密度，したがって作用積分がこの変換の下で不変であるならば，そのときには，

$$\frac{d\Theta_\nu}{dx_\nu}=0,\qquad(12-158)$$

の保存方程式がある．ここで，

$$\Theta_\nu=c_\rho\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{\rho,\nu}}\eta_\rho\,,\qquad(12-159)$$

---

*) A_μ に 4 次元勾配 $\Lambda_{,\mu}$ を付け加える電磁場に対するよく知られたゲージ変換は，第 2 種のゲージ変換の 1 部であって，ここでは考えない．

である．(12－158) 式は，連続の方程式の形であって，Θ_νは流れの密度 j_ν の役割をしている．したがって，第1種のゲージ変換の下での不変性から，場に関連した電荷と電流密度に対して保存電流を確認することができる．

1例として，第12－6節の第1の例，複素スカラー場を考えてみよう．

$$\phi' = \phi e^{i\epsilon}, \qquad \phi^{*\prime} = \phi^* e^{-i\epsilon}, \tag{12－160}$$

の型の変換は，無限小変換の場合には，

$$c = i, \qquad c^* = -i,$$

であるような第1種のゲージ変換 (12－157) 式に対応している．(12－100) 式のラグランジアン密度は，変換 (12－160) の下で不変であることは明らかである．したがって，Klein-Gordonの場に対しては関連する電流密度があって，それは，

$$j_\mu = iq\left(\frac{d\phi}{dx_\mu}\phi^* - \phi\frac{d\phi^*}{dx_\mu}\right), \tag{12－161}$$

p.594
で与えられる．これは通常の量子力学における流れの密度と一致している．保存される電流密度の導出は全面的に，場が複素であることに依存していることに注意しよう．このように，上に述べた通り，実の場は場に結びついた電荷あるいは電流密度を与えない．荷電粒子に結びついた場を記述するためには，一対の複素場を用いなければならない．すなわち，(スピンのない) Klein-Gordon粒子に対しては ϕ と ϕ^*，またスピン$\frac{1}{2}$のDirac電子に対しては ψ と $\psi^\dagger$を用いなければならない．

Dirac場のラグランジアン密度 (12－116) 式は，もし4つの要素をもつ場の変数 ψ および $\psi^\dagger$ によって，(12－160) 式の中の ϕ と ϕ^*を置き換えるならば，同じ変換に対して不変である．したがって，$\mathscr{L}$ が $\psi^\dagger{}_{,\mu}$ を含まない限り，

$$\Theta_\mu = i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_{,\mu}}\psi,$$

によって与えられる，ゲージ不変性と結びついた保存的な流れが存在する．Klein-Gordonの場のパターンに従って，Dirac 場は電流密度，

$$j_\mu = iq(i\psi^\dagger\gamma_\mu)\psi = -q\psi^\dagger\gamma_\mu\psi\,,$$

を持つことが期待されるであろう．実際，これはまさに（12－134）式で述べられ，またDirac場と電磁場との相互作用を表わすのに用いられた j_μ の形にほかならない．（12－134）式を選ぶことは，その時点では明らかに唐突なことではあったけれども，いまやNoetherの定理によって，ラグランジアン密度のゲージ不変性の結果であることがわかる．

Noetherの定理から，ラグランジアン密度の連続的な対称性が保存条件を与えることが証明されるが逆は真ではないことは注意さるべきことである．どんな対称性にも対応させることのできない保存条件があるように思われる．現在のところ，その最も顕著な例は，ソリトン解をもつ場，例えばsine-Gordon方程式またはKorteweg-de Vries方程式（815ページ参照）によって記述される場である．

例えば，sine-Gordonの方程式（12－109）に対するラグランジアン密度を考えよう．$\mathscr{L}$ の中には x と t は陽に現われないので，ラグランジアン密度は空間と時間の並進の下で不変でありNoetherの定理の条件を満たしている．その上，（x, t 空間での）Lorentz変換に対する対称性がある．他の対称性は明らかではない．それゆえ，Noetherの定理を適用することによって，4個以上の保存量が存在することを期待することはしないであろう．しかし，場のラグランジアンによる記述とは関係のない方法で，無限個の保存量が存在することが示された．すなわち，ϕ とその導関数の多項式である，無限個の異なった関数 F_i と G_i を見出すことができ，それらに対しては，

$$\frac{dF_i}{dt} + \frac{dG_i}{dx} = 0,$$

p.595

が成立する．それゆえ，F_i の体積積分は時間がたっても変わらない．そのような保存量の無限個の組が存在するということは，場がソリトンを記述するための必要条件であるように思われる．ソリトンについての研究は，目下活発に発展している状態であって，そのために保存量と場の性質との間の関係についての結論を述べることは，恐らく今の段階ではできないであろう．

最後に，不連続的な系に対して適用されるNoetherの定理の変形も容易に導くことができる．不連続的な系に対しては，時空の4つの座標は，もはや同等な立場にあるパラメーター的変数ではない．空間座標は，その役割を力学変数（またはその関数）にもどし，時間のみがパラメーターの役割を演じる．作用積分は，4次元の体積積分，

$$I = \int \mathscr{L}(dx_\mu),$$

の代わりに，t に関する1次元の積分，

$$I = \int L\, dt,$$

である．連続的な指標で表わされる場の変数 $\eta_\rho(x_\mu)$ の代わりに，不連続な一般化座標 $q_k(t)$ がある．このような翻訳を，Noetherの定理に導く手順に対して行うことは十分に直接的である．このように（12－139）から（12－156）式に含まれた議論を，不連続な系に適用するときにも繰り返すことができる．しかし，この転換の効果は，十分明らかで見透しのよいものだから，必要な翻訳を直接最後の結果（12－156）式について行うことができることは直ちにわかる．この翻訳の規則は次のように要約される．

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &\to L, \\ x_\mu \text{ あるいは } x_\nu &\to t, \\ \eta_\rho &\to q_k, \\ \eta_{\rho,\nu} &\to \dot{q}_k. \end{aligned} \qquad (12-162)$$

さらに，4つの値をとるギリシャ文字についてのすべての和は，t についての1つの項となる．その結果，その下でラグランジアンが形の不変性およびスケール不変性を示すべき変換（12－152）式は，

$$\delta t = \epsilon_r X_r, \qquad \delta q_k = \epsilon_r \Psi_{rk}, \qquad (12-163)$$

となる．不変性から導かれる保存則について述べている（12－156）式は，ここでは，

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right)X_r - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Psi_{rk}\right\} = 0, \qquad (12-164)$$

の形になる．(12－164) 式は不連続な力学系に対する Noether の定理の結論を述べたものである．

p.596
(12－164) 式の小括孤内の式は，われわれのよく知っている (2－53) 式の Jacobi の積分 h，すなわち (q, p) で表わせばハミルトニアンである．実際，時間の平行移動のみを含む変換，

$$X_r = \delta_{r1}, \qquad \Psi_{rk} = 0, \qquad (12-165)$$

を考えることによって，再び h の保存を得ることができる．もしラグランジアンが時間の陽な関数でないならば，このときは明らかに，ラグランジアンの形および作用積分の値はこの変換によって影響を受けない．しかし，Noether の定理 (12－164) 式は，その結果として保存則，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right) = 0,$$

があることを述べており，これは第 2－6 節のなじみ深い結論と同一のものである．

さらに，特定の座標 q_l がサイクリックであると仮定しよう．このとき，ラグランジアンと作用は，

$$X_r = 0, \qquad \Psi_{rk} = \delta_{kl}\delta_{r1}, \qquad (12-166)$$

で与えられる変換の下で不変である．そうすると，(12－164) 式は直ちに，1 つの保存則，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) = 0,$$

すなわち，

$$\dot{p}_l = 0,$$

を意味する．

このように，Jacobi の積分およびサイクリックな座標に共役な一般化運動量

の両方に対する保存則は，(12－164)式で表わされたNoetherの定理に含まれている．力学系の対称性と保存量との間の関係は，ここで与えられたように，力学のいろいろな定式化全体を通し伸びている1本の糸のようである．いわば，1回りして元に戻ったようなもので，第1章で見出された対称性の定理を洗練された方法で再び導出した．したがって，ここがわれわれの議論を終えるのに適当な時点であるように思われる．

参　考　書

J. C. SLATER AND N. H. FRANK, *Mechanics.*　このいくらか古いテキストは，不連続的な系から連続的な系への移行について，読み易くかつ時には初等的な議論を与えている主な参考文献である．特に第Ⅶ章には，不連続な鎖から連続的な弦への移動が，横振動(transverse vibration)の場合について論じられている．

LORD RAYLEIGH, *The Theory of Sound.*　この書物は当然連続体の振動に関する多くの題材を含んでいる．第2巻の第Ⅺ章では気体中の音の伝播に対する波動方程式の議論があり，そこでは気体の断熱的な運動と等温的な運動との関係が非常に詳しく調べられている．

p.597

G. WENTZEL, *Introduction to the Quantum Theory of Fields.*　場の量子論についての大部分の書物は古典場の議論から始まっており，しばしば古典論の最良の文献となっている．Wentzelの書物はそのようなものの最初の1つである．古典的な側面の取り扱いについては，その範囲とわかり易さのために，この書物は今なお参考にする価値がある．しかしながら，この書物で量子論的定式化について述べているところはもう不用になってから久しく，今では歴史的興味があるだけである．全体を通じてMinkowski空間が用いられている．

A. O. BARUT, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles.*　場の古典論の定式化に関する1冊の参考書としては恐らくは最良のものと言ってもよい，このBarutの書物は，比較的小さいスペースの中に多量の情報――ラグランジアン，場の方程式，応力・エネルギー・テンソルおよびいろいろな場に対する保存量等がつめこまれている．この書物では，かなり複雑であるという注意の下でハミルトニアンによる定式化の共変的な取り扱いを与える試みがなされている．文献にでてくる多くの珍らしいこと，例えばこの初等的レベルでは安心して無視することのできる，Maxwell方程式のスピノール形のようなものが集められている．Noetherの定理は論じられているが，この名前はつけられていない(ちなみに，前の第12－7節におけるNoetherの定理の取り扱いは，

T. H. Boyer, *American Journal of Physics* 34, 475, June 1966の論文に大いに啓発されたものであることを述べておこう）: Barutはトレース－2をもつ空間を用いていることを覚えておくべきである．

E. J. SALETAN AND A. H. CROMER, *Theoretical Mechanics.* 物理学者向けの古典力学に関する最も現代的な教科書は，場の古典理論についての説明を含んでおり，この書物は最良のものの1つである（この書物の第Ⅷ章）．トレース－2の4次元空間が全体を通じて用いられており，計量テンソルや上つきおよび下つきの指標のついた公式でいっぱいである（この定式化の彼等の特別なやり方の理由は必ずしも明らかではないが）．特に注目に値するのは，規格直交関数系を用いた，場の一般的展開による運動量表示の一般化である．

J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics.* すでに述べたように，この第2版ではMinkowski空間からトレース－2の空間に変えられている．しかし，トレース－2の空間での量の取り扱い方は，特殊相対論に関する第11章で詳しく述べられている．古典場の定式化は第12章で取り扱われ，当然のことながら電磁場に大きな力点がおかれているが，それについてはあらゆる側面から論じられている．特に注目に値するのは，Procaのラグランジアンについての記述であって，これはもし光子が質量を持つとするならば，そのときの電磁場のラグランジアン密度の形を示唆している．全体にわたって議論は丁寧であり，かつ非常に明快である．

演習問題

1. a） 絃の横振動は，質量のない絃の上に等間隔に並んでいる質点からできている系で近似することができる．質点の間隔を零に近づけると，ラグランジアンは，連続的な絃に対する極限，

$$L = \frac{1}{2}\int\left[\mu\dot{\eta}^2 - T\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]dx\ ,$$

に近づくことを示せ．ここでTは一定の大きさの張力である．線密度μが位置の関数であれば，運動方程式はどうなるか？

b） 連続的な絃の横振動に対する運動エネルギーおよび位置エネルギーを見出すことによって，ラグランジアンを求めよ．位置エネルギーは，横振動において絃が伸ばされるとき，張力によってなされる仕事から計算することができる．

p.598

2. a） ハミルトニアンによる定式化によって，気体中の音の振動の場を記述し，対応するHamiltonの運動方程式を求めよ．

b） 運動量による展開をベクトル場に対して一般化して，気体の音響モードのハミルトニアンを運動量表示で表わせ．

3. 第8－5節の手順に従って，変形されたHamiltonの原理から連続的な系に対するHamiltonの運動方程式を求めよ．

4. ψ , ψ^*を２つの独立な場の変数とすると，ラグランジアン密度，

$$\mathscr{L} = \frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla\psi\cdot\nabla\psi^* + V\psi^*\psi + \frac{h}{4\pi i}(\psi^*\dot{\psi} - \psi\dot{\psi}^*),$$

から，Schrödinger方程式，

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2\psi + V\psi = \frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

および，それに複素共役な方程式が導かれることを示せ．正準運動量はどうなるか？また，この$\mathscr{L}$に対するハミルトニアン密度を求めよ．

5. ハミルトニアン密度が位置を陽に含まない関数であれば，

$$G_i = -\int \pi_\rho \frac{d\eta_\rho}{dx_i} dV$$

は運動の定数であることを示せ．G_iはx_i方向の場の全線運動量と同一であることを証明することができる．不連続な系に対する普通の線運動量の保存と，この法則との類似性は明らかである．

6. a） ユークリッド的でない４次元空間において，ダランベルシャンは，

$$\Box^2 = g^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu},$$

と定義される．ここで $g^{\mu\nu}$ は反変計量テンソルであり，これは特殊相対論における平坦な空間では実際 $g_{\mu\nu}$ と同じである（第７－３節参照）．トレースが－２の計量テンソル，（７－53）式に対して，上のように定義されたダランベルシャンの陽な形を求めよ．

b） 上の計量を用いたときの，荷電スカラー場に対して適当なラグランジアンは，

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\phi^*}{\partial x^\nu} - \mu_0^2\phi\phi^*\right),$$

である．対応する場の方程式の１つは，

$$(\Box^2 + \mu_0^2)\phi = 0,$$

であることを示せ．また，a）のところで述べたことを考え合わせると，この方程式は実際に（12－103）式と同一であることを示せ．

7. 荷電スカラー中間子に対するラグランジアン密度（12－100）式に対して，電磁場

との相互作用を表わす項,

$$\frac{j_\lambda A_\lambda}{c},$$

p.599
を付け加える．ここで,

$$j_\lambda = i(\phi\phi^*_{,\lambda} - \phi_{,\lambda}\phi^*),$$

である．ϕおよびϕ^*に対する場の方程式はどうなるか？ 保存電流およびそれに関連した保存則に対して何が起こるか？

8. Hamiltonの原理におけるラグランジアン密度が，場の量η_ρの高階導関数を含み,

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\eta_\rho, \eta_{\rho,\mu}, \eta_{\rho,\mu\nu}, x_\lambda),$$

の形であるとしよう．端点で変分が零になると仮定すれば，そのようなラグランジアン密度に対応する場の方程式の形はどうなるか？

9. 簡単のために，xとtのみの関数であるスカラーの場の量ηを考えよう．いま，ハミルトニアン密度はηとπの高階の空間的導関数の関数，すなわち,

$$\mathscr{H} = \eta^3 + \frac{1}{2}\eta^2{}_{,x} + \pi^3{}_{,x} + \frac{1}{2}\pi^2{}_{,xx},$$

であるとしよう．これに対応するHamiltonの運動方程式はどうなるか？

10. Korteweg-de Vriesの方程式は，ラグランジアン密度

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\psi_x\psi_t + \frac{\alpha}{6}\psi_x^3 - \frac{\nu}{2}\psi_{xx},$$

を持つスカラー場に対する場の方程式に対応することを示せ．ここでψは(12－115)式に従う量ϕに対するポテンシャル関数,

$$\phi = \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

であるとし，添字は示された変数に関する導関数を示す．

11. (x, t)空間でのハミルトニアン密度,

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}(\eta, \eta_{,x}, \pi, \pi_{,x}, \pi_{,xx}),$$

を考えよう．もし,

$$\eta = \phi(x, t),$$

$$\pi = \int_{-\infty}^{x} \phi(x', t)\,dx',$$

であるとすれば，Hamiltonの運動方程式は，Korteweg-de Vries の方程式の１つの形（12－115）式に対応することを示せ.

12.　（12－129）式によって与えられる自由な電磁場の，対称化された応力・エネルギー・テンソルに対して，iT_{j4}/c および T_{ij} を陽な形に表わせ．これらの成分の物理的意味について何がいえるか？

13. a）第７－３節の（７－53）式によって定義されるトレースが－２の計量 $g_{\mu\nu}$ を持つ４次元空間において，電磁場の共変テンソル（数学的な意味での）$F_{\mu\nu}$ の要素を陽な形に求めよ．また，１つの指標および２つの指標を上げた行列の要素，

$$F^{\lambda}_{\rho} = g^{\lambda\mu} F_{\mu\nu}; \qquad F^{\lambda\rho} = g^{\lambda\mu} F_{\mu\nu} g^{\rho\nu},$$

を求めよ．

p.600

b）この計量において，外部電流を持つ Maxwell の方程式に導くラグランジアン密度は，

$$\mathscr{L} = -\frac{F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}}{16\pi} - \frac{j^{\lambda}A_{\lambda}}{c},$$

で与えられることを示せ．

c）同じ計量を用いたときの対称な応力・エネルギー・テンソルの要素を求めよ．

14.　（12－131）式は，電磁場に対する別の形のラグランジアン密度を与えている．このラグランジアン密度に対応する応力・エネルギー・テンソルを求めよ．その成分に対して，物理的意味づけを与えることができるか．自由場に対する保存方程式はどうなるか？

付録D　Hamilton-Jacobiの方程式の変数分離可能性に対するStaeckelの条件

p.613
われわれはここで，Staeckelの条件（655ページを見よ）がHamilton-Jacobiの方程式の分離可能性に対する十分条件を与えること，すなわち，もしその条件が満足されるならば，Hamilton-Jacobiの方程式の中の変数は分離できることを示す．Staeckelの条件の必要性（ある制限の下での）の証明はParsの書物の中に見出される.* ここで与える証明は，Garfinkelによって概略が述べられている手順に従っている.†

（10－44）と（10－45）式から，系に対するハミルトニアンは次の形に書くことができる．

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \frac{(p_i - a_i)^2}{T_{ii}} + V(q)\,. \qquad \text{(D－1)}$$

系は保存的であるから，Hamilton-Jacobiの方程式の両方の形は，（10－46）式を用いることによって，

$$\frac{1}{2}\sum_i \frac{1}{T_{ii}}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_i} - a_i\right)^2 + 2V_i(q_i)\right] = \alpha_1, \qquad \text{(D－2)}$$

の形に帰着される．ここに α_1 は n 個の積分定数のうちの第1のものである．（D－2）式は，次のようないくつかの n 次元ベクトルを定義することによって，まとまった形に書くことができる．

b　その要素は　$\dfrac{1}{T_{ii}}$,

---

*) L A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics*, 1965, pp. 321－323.

†) B. Garfinkel, *Space mathematics, Part* I,（J. B. Rosser, ed.）1966, pp. 52－54（そこにはいくつかの明らかなミスプリントがある．すなわち，(82)式の中の因子2と(87)式の中の負号がそれである）．

c　　その要素は　　$\left(\dfrac{\partial W}{\partial q_i} - a_i\right)^2$,

V　　その要素は　　$V_i(q_i)$.

そうすると（D－2）式は,（行列の記法で）スカラー方程式,

$$\mathbf{b}(\mathbf{c}+2\mathbf{V})=2\alpha_1 \qquad (\text{D}-3)$$

となる.

p. 614
Staeckelの条件の最後のもの,（10－47）式もまた，成分,

$$(\boldsymbol{\delta}_1)_j=\delta_{1j}, \qquad (\text{D}-4)$$

をもつベクトル $\boldsymbol{\delta}_1$ を定義することによって，行列の形に書くことができる．$\boldsymbol{\delta}_1$ は第 1 要素が 1 で，残りのすべての要素は 0 であるベクトルである．そうすると,（10－47）式は，今用いているわれわれの記法では,

$$\mathbf{b}=\boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\phi}^{-1}, \qquad (\text{D}-5)$$

の形になる．さて,（D－3）式の 1 つの解は，つぎの形の中に含まれていることを主張する.

$$\mathbf{c}+2\mathbf{V}=2\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\gamma}. \qquad (\text{D}-6)$$

ここに $\boldsymbol{\gamma}$ は，定数であること以外は何も指定されない要素をもつ，1 つのベクトルである.（D－3）式が成立するためには,

$$\mathbf{b}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\gamma}=\alpha_1,$$

あるいは,（D－5）式によって,

$$\boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\gamma}=\alpha_1, \qquad (\text{D}-7)$$

であることが導かれなければならない.（D－4）式で定義されたように，ベクトル $\boldsymbol{\delta}_1$ の性質は,（D－7）式が,

$$\gamma_1=\alpha_1 \qquad (\text{D}-7')$$

になるようなものである．すなわち，$\boldsymbol{\gamma}$ の第 1 要素は積分定数 α_1 でなければならない.

（D－6）式は，次の方程式の組と等価である．

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_i} - a_i(q_i)\right)^2 = -2V_i(q_i) + 2\sum_j \phi_{ij}(q_i)\gamma_j. \qquad \text{（D－8）}$$

i 番目の方程式の中の他のすべての項は q_i だけに依存するので，W に対する1つの完全解は，次のような分離された形に求めることができる．

$$W(q_1, \ldots, q_n) = \sum_i W_i(q_i). \qquad \text{（D－9）}$$

それゆえ，最終的に，

$$\left(\frac{\partial W_i(q_i)}{\partial q_i} - a_i(q_i)\right)^2 = -2V_i(q_i) + 2\sum_j \phi_{ij}(q_i)\gamma_j, \qquad \text{（D－10）}$$

が得られるが，これは（10－48）式と等価である．

行列 $\boldsymbol{\phi}$ は $\mathbf{T}$ 行列の対角要素と座標系の性質だけに依存し，“ポテンシャル・ベクトル” $\mathbf{V}$ には少しも依存しないことに注意せよ．1つの例として，球面極座標を用いたときの1個の粒子の問題で用いられるべき，$\boldsymbol{\phi}$ に対する適切な形を考えてみよう．$\boldsymbol{\phi}$ の要素は，Hamilton-Jacobi の方程式が直接分離可能であるような，この種の簡単な問題を考えることによって導き出すことができる．中
p.615 心力の影響を受ける，空間における運動は，そのような1つの問題を与える．r, θ, ϕ 座標を，それぞれ添字1, 2, 3で示すならば，分離された方程式（10－59），（10－58）および（10－56）は次のように書くことができる．

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 = -2mV(r) + 2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2}, \qquad \text{（D－11a）}$$

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta}\right)^2 = \alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}, \qquad \text{（D－11b）}$$

$$\left(\frac{\partial W_3}{\partial \phi}\right)^2 = \alpha_3^2. \qquad \text{（D－11c）}$$

われわれは $\boldsymbol{\phi}^{-1}$ の第1行の各要素は，因子 $1/m$ を持つべきであることを知っているから，$\boldsymbol{\phi}$ の各要素は因子 m を持たなければならないことを期待するであろう．（D－11）式と（D－10）式とを比較すると，$\boldsymbol{\gamma}$ と $\boldsymbol{\phi}$ に対する次の要素が示唆される．

$$\gamma_1 = \alpha_1, \qquad \gamma_2 = \frac{\alpha_2^2}{2m}, \qquad \gamma_3 = \frac{\alpha_3^2}{2m}, \tag{D－12}$$

および,

$$\boldsymbol{\phi} = m \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 & -\csc^2\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{D－13}$$

そうすると，直接に計算することによって，逆行列 $\boldsymbol{\phi}^{-1}$ は,

$$\boldsymbol{\phi}^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{r^2} & \dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta} \\ 0 & 1 & \csc^2\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{D－14}$$

であることが示される．$\boldsymbol{\phi}$ と $\boldsymbol{\phi}^{-1}$ とは両方共，それらに要求される性質をもつことは明らかである.

付録E　気体中における音響場のラグランジアン形式

p.616
気体中における音の振動を記述する場の方程式について研究するために，気体の各粒子のその基準の位置からの変位を，成分 $\eta_i, i=1,2,3$ を持つベクトル $\boldsymbol{\eta}$ によって表わすことにする．このようにすると，空間の各点 x, y, z には3つの一般化座標が結びつけられる．波の振幅は常に小さく，圧力 P と密度 μ は，それぞれつり合いの状態における値 P_0, μ_0 とわずかしか違わないと仮定する．

不連続な系では，運動エネルギーおよび位置エネルギーを求めて，その差としてラグランジアンを書き下せば，問題をラグランジアン形式に作り上げることができる．ここでわれわれの求めるラグランジアンは，ラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ の体積積分である．運動エネルギーおよび位置エネルギーも，同じようにそれぞれ密度 $\mathscr{T}$ および $\mathscr{V}$ の体積積分として得られて，

$$\mathscr{L} = \mathscr{T} - \mathscr{V}, \tag{E-1}$$

の関係が成立する．運動エネルギー密度については何も問題はない．つり合いからの変位が小さいことに注意すれば，

$$\mathscr{T} = \frac{\mu_0}{2}\dot{\boldsymbol{\eta}}^2 = \frac{\mu_0}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2), \tag{E-2}$$

が得られる．

位置エネルギー密度を求めることはもう少し難かしい．気体の位置エネルギーは，気体が圧力に抗して膨張するときになし得る仕事の目安を与える．それは，本質的には17世紀の科学者が好んで気体の“ばね”(spring)と呼んだものから生じる．質量 M の気体を考えよう．それは，つり合いの状態では，体積，

$$V_0 = \frac{M}{\mu_0} \tag{E-3}$$

を占めているが，この体積は十分小さくて，その中では$\mathscr{V}$は一定であるとみなしてよいものとする．この気体の持つ位置エネルギーは$\mathscr{V}V_0$である．音波が生
p.617
じると，その体積はV_0から$V_0 + \Delta V$に変化する．ところで，体積がdVだけ変化すると，気体に対してなされる仕事，すなわち位置エネルギーの増加は$-P\,dV$である.* それゆえ，V_0から$V_0 + \Delta V$への体積の変化に対応する位置エネルギーの増加は，

$$\mathscr{V}V_0 = -\int_{V_0}^{V_0+\Delta V} P\,dV,$$

である．ΔVは小さい量であるから，この積分は$P_0\ \Delta V$で近似することができると思われるかも知れない．しかし，後でわかるように，実際はこの項は運動方程式には寄与しないのである．したがって，次の近似まで進まなければならない．それは，PとVの関係を表わす曲線において，V_0と$V_0+\Delta V$の間の部分を直線で置き換えるという近似である（図E−1参照）．そうすると，

$$\int_{V_0}^{V_0+\Delta V} P\,dV = P_0\ \Delta V + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_0 (\Delta V)^2, \tag{E-4}$$

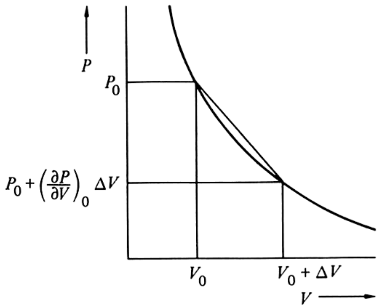
となる．

PのVに関する導関数を計算するためには，しばらく横道へ入って熱力学を用いなければならない．ちょっと考えると，圧力と体積の間の関係として，Boyleの法則，

$$PV = C, \tag{E-5}$$

を用いたくなるかもしれない．そして実際Newtonはこの方法に従ったのである．しかしながら，そうすると正しくない結果がでてくる．それは，（E−5）式では，圧力と体積の変化が等温的に（*isothermally*）行われると仮定されているからである．音の振動は実際にはほとんど常にきわめて速かに行われ，発

*）この式の，普通に行われる初等的な導き方は次の通りである．外部の系から面積要素dAに働らく力は，気体に対して内側向きにPdAである．膨張するときには，表面はその法線方向の外向きにdxだけ動く．したがって外部からなされる仕事は$-P\,dA\,dx = -P\,dV$である．



図E－1
気体に対する圧力‐体積図.

生した熱が熱伝導によって運び去られて温度が一定に保たれる時間的余裕がない．そのときには，膨張と収縮は**断熱的に**(*adiabatically*)，すなわち熱を失うことなしに起こるのである．この条件の下では，PとVの間の関係は，

$$PV^{\gamma}=C, \tag{E-6}$$

p.618
で与えられる．ここでγは定圧比熱と定積比熱の比である*．それゆえ，求める導関数は，

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_0=-\frac{\gamma P_0}{V_0}, \tag{E-7}$$

である.

体積の変化を，それに伴って起こる密度の変化で表わしておくと都合がよい．$V=M/\mu$であるから，Vの変化は，

$$\Delta V=-\frac{M}{\mu_0^2}\Delta\mu=-V_0\sigma, \tag{E-8}$$

で与えられる．ここで，密度変化の割合をσと書いた．すなわち，

$$\mu=\mu_0(1+\sigma), \tag{E-9}$$

---

*) この式の導き方は M. W. Zemansky, *Heat and Thermodynamics*, 5th ed. (New York, 1968) 第5－5節を見よ.

である．（E－3, 4, 7 および 9）式を結びつけると，位置エネルギー密度は，

$$\mathscr{V} = P_0\sigma + \frac{\gamma P_0}{2}\sigma^2, \qquad (E-10)$$

となる．しかし，これはまだラグランジアンの中に用いるのに都合のよい形にはなっていない．すなわち，われわれは更に σ を $\boldsymbol{\eta}$ で表わさなければならない．空間の中の任意の有限の体積 V を考えよう．つり合いの状態からのわずかなずれによって，この体積から外へ流れでる質量は，

$$\mu_0 \int \boldsymbol{\eta}\cdot d\mathbf{A},$$

で与えられる．ここで面積積分は，この体積を囲む表面全体にわたって行われる．この質量の移動は，密度の変化の体積積分に等しくなければならない．すなわち，

$$-\mu_0 \int \sigma\, dV = \mu_0 \int \boldsymbol{\eta}\cdot d\mathbf{A}, \qquad (E-11)$$

が成立する．発散定理（divergence theorem）によって，この関係（E－11）は次のように書くことができる．

$$-\int \sigma\, dV = \int \nabla\cdot\boldsymbol{\eta}\, dV.$$

この等式は任意の体積について成立するから，

$$\sigma = -\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}, \qquad (E-12)$$

でなければならない.* この関係を用いると，位置エネルギー密度の最終的な形は，

$$\mathscr{V} = -P_0\nabla\cdot\boldsymbol{\eta} + \frac{\gamma P_0}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})^2, \qquad (E-13)$$

となる．

ここまでくれば，$\mathscr{V}$ の式の中で σ について 1 次の項は全位置エネルギーに寄

---

*）（E－12）式は，それをもっとなじみ深い形，

$$\dot{\mu} = -\nabla\cdot\mu\dot{\boldsymbol{\eta}},$$

に書き直してみれば，気体の流れに対する**連続の方程式**（*equation of continuity*）であることがわかるであろう．

与することはできないということがわかる.（E－11）式によれば，σ の体積積分は $\boldsymbol{\eta}$ の表面積分の符号を変えたものに等しく，したがって，もしその面が系を完全に囲んでいれば，これは零になる．すなわち，質量は系の外へは出て行かない．けれども，この項が L に対して零の寄与しか与えないということは，この項を $\mathscr{V}$ から落してしまってもよいという十分な理由にはならない．この項の関数的な振舞が運動方程式には影響を与えるかも知れないということが考えられる（ある系の共変ハミルトニアンが零であっても，運動方程式はもちろん消えてしまうわけではないことを思い出そう）．それで，この項は差当り残しておくことにしよう．そうすると，系の完全なラグランジアン密度は，

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\mu_0\dot{\boldsymbol{\eta}}^2 + 2P_0\nabla\cdot\boldsymbol{\eta} - \gamma P_0(\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})^2), \qquad (\text{E}-14)$$

の形に書くことができて，これは（12－24）式にほかならない．

参考文献一覧

下に挙げる（大部分の）書物は，この本を準備するに当って参考にしたものである．新しい版またはリプリントが出ているものについては，項目の後に注意してある．この参考文献一覧が完全なものであることは主張しない．この一覧の中に挙げられている書物が，本文の中のある章末の参考書の所に記載されているときには，そのことは項目の最後の括弧の中に，その章の番号として示してある．[1)]

古典力学一般に関する参考書

AHARONI, J., *Lectures on mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1972. (Chapter 5)

AMES, JOSEPH SWEETMAN, AND FRANCIS D. MURNHAGHAN, *Theoretical mechanics*. Boston: Ginn and Company, 1929. New York: Dover, 1958.

APPEL, PAUL, *Traité de mécanique rationelle, Tome 2: Dynamique des systèmes. Mécanique analytique*, 6th ed. Paris: Gauthier-Villars, 1953.

BARGER, VERNON D., AND MARTIN G. OLSSON, *Classical mechanics, a modern perspective*. New York: McGraw-Hill, 1973. (Chapter 5)（戸田盛和，田上由紀子訳　力学　（培風館））

BARTLETT, JAMES H., *Classical and modern mechanics*. University, Alabama: University of Alabama Press, 1975.

BRADBURY, T. C., *Theoretical mechanics*. New York: Wiley, 1968. (Chapter 4)

CORBEN, H. C., AND PHILIP STEHLE, *Classical mechanics*, 2nd ed. New York: Wiley, 1960. New York: R. E. Krieger, 1974. (Chapter 6)

FINKELSTEIN, ROBERT J., *Nonrelativistic mechanics*. Reading, Mass.: W. A. Benjamin, 1973.

FOWLES, GRANT R., *Analytical mechanics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1962.

1) 邦訳のあるものは，気のついた限り，項目の最後の所に，訳者，書名，発行所をつけ加えてある．また日本語で書かれた参考書も，それぞれ適当と思われる分類の最後の所に入れておいた．これらはもちろん完璧を期するものではなく，訳者の偏見がはいっているものであることをお断わりしておく．

GANTMACHER, F., *Lectures in analytical mechanics*. Translated from Russian. Moscow: Mir Publishers, 1970. Reprint, 1975.

GREENWOOD, DONALD T., *Principles of dynamics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965.

———. *Classical dynamics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977.

GROESBERG, SANFORD WALTON, *Advanced mechanics*. New York: Wiley, 1968. (Chapter 5)

HAMEL, GEORG, *Theoretische Mechanik, eine einhertliche einführung in die gesamte Mechanik*. Berlin: Springer-Verlag, 1949. Corrected reprint, 1967. (Chapter 4)

HAUSER, WALTER, *Introduction to the principles of mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965. (Chapter 1)

KANE, THOMAS R., *Dynamics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

KILMISTER, C. W., *Hamiltonian dynamics*. New York: Wiley, 1964. (Chapter 9)

———. *Lagrangian dynamics*. New York: Plenum Press, 1967.

KILMISTER, C. W., AND J. E. REEVE, *Rational mechanics*. New York: American Elsevier, 1966. (Chapter 1)

KONOPINSKI, EMIL JAN, *Classical descriptions of motion*. San Francisco: Freeman, 1969.

LANCZOS, CORNELIUS, *The variational principles of mechanics*, 4th ed. Toronto: University of Toronto Press, 1970. (Chapters 1, 2, 8, 9, 10)

LANDAU, L. D., AND E. M. LIFSHITZ, *Mechanics*, 3rd ed. *Course of Theoretical Physics*, vol. 1. Translated from Russian. Oxford: Pergamon Press, 1976. (Chapters, 1, 3, 6)（広重徹, 水戸巌訳　力学　（東京図書））

MACMILLAN, WILLIAM DUNCAN, *Theoretical mechanics*.
Vol. 1: *Statics and the dynamics of a particle*. New York: McGraw-Hill, 1927. (Chapter 3)
Vol. 3: *Dynamics of rigid bodies*. New York: McGraw-Hill, 1936. New York: Dover, 1960. (Chapter 5)

MARION, JERRY B., *Classical dynamics of particles and systems*, 2nd ed. New York: Academic Press, 1970. (Chapter 3)（伊原千秋訳　力学 I, II　（紀伊国屋書店））

MEIROVITCH, LEONARD, *Methods of analytical dynamics*. New York: McGraw-Hill, 1970. (Chapters 5, 6)

MILNE, E. A., *Vectorial mechanics*. New York: Interscience Publishers, 1948.

MORGENSTERN, D., AND I. SZABO, *Vorlesungen über theoretische Mechanik*. Berlin: Springer-Verlag, 1961.

OSGOOD, WILLIAM F., *Mechanics*. New York: Macmillan, 1937. (Chapter 1)

PARS, L. A., *A treatise on analytical dynamics*. London: Heinemann, 1965.

SALETAN, EUGENE J., AND ALAN H. CROMER, *Theoretical mechanics*. New York: Wiley, 1971. (Chapters 4, 9, 11, 12)

SLATER, JOHN C., AND NATHANIEL H. FRANK, *Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1947. (Chapter 12)（柿内賢信訳　力学　（丸善））

SOMMERFELD, ARNOLD, *Mechanics. Lectures on theoretical physics*, vol. 1. New York: Academic Press, 1952. (Chapter 5) (高橋安太郎訳　力学　(講談社))

SPOSITO, GARRISON, *An introduction to classical dynamics*. New York: Wiley, 1976.

SUDARSHAN, E. C. G., AND N. MUKUNDA, *Classical dynamics: A modern perspective*. New York: Wiley, 1974. (Chapter 9)

SYMON, KEITH R., *Mechanics*, 3rd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1971. (Chapters 1, 5, 7, 8)

SYNGE, JOHN L., *Classical dynamics*, in vol. 3, part 1 of *Encyclopedia of physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1960. (Chapters 8, 9)

SYNGE, JOHN L., AND BYRON A. GRIFFITH, *Principles of mechanics*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1959.

TER HARR, D., *Elements of Hamiltonian mechanics*. Amsterdam: North-Holland, 1961. Second ed., Oxford; Pergamon Press, 1971. (Chapters 6, 8, 10)

THIRRING, WALTER, *A· course in mathematical physics I: Classical dynamical systems*. Translated from German. New York: Springer-Verlag, 1978.

THOMSON, WILLIAM (LORD KELVIN), AND PETER GUTHRIE TAIT, *Treatise on natural philosophy*. Cambridge: Cambridge University Press, 1879. Slightly revised, 1896. Reprinted as *Principles of mechanics and dynamics*, New York: Dover, 1962.

WEBSTER, ARTHUR GORDON, *The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies*. Leipzig: B. G. Teubner, 1904. New York: Stechert-Hafner, 1920.

WELLS, DALE A., *Theory and problems of Lagrangian dynamics*. New York: McGraw-Hill (Schaum), 1967. (Chapters 2, 8)

WHITTAKER, E. T., *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1937. (Chapters 1, 2, 3, 4, 6, 8) (多田政忠, 藪下信訳　解析力学上, 下 (講談社))

ZAJAC, ALFRED, *Basic principles and laws of mechanics*. Boston: D. C. Heath, 1966.

———. *Principles of classical mechanics and field theory*, in vol. 3, part 1 of *Encyclopedia of physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1960. (Chapters 1, 8) (*See also* J. L. Synge; and C. Truesdell and R. A. Toupin.)

山内恭彦　一般力学 (増改訂)　岩波書店　1957
原島　鮮　力学 (改訂版)　裳華房　1966
山内, 末岡　大学演習　力学　裳華房　1958
伏見康治　現代物理学を学ぶための古典力学　岩波書店　1964
小出昭一郎　力学 (岩波全書)　岩波書店　1980
富山小太郎　力学　岩波書店　1970
高橋　康　量子力学を学ぶための解析力学　講談社　1978
高橋　康　量子場を学ぶための解析力学入門　講談社
高野義郎　力学　朝倉書店　1981

古典力学の特殊な分野に関する参考書

ABRAHAM, RALPH, AND JERROLD E. MARSDEN, *Foundations of mechanics*, 2nd ed. Reading, Mass.: Benjamin/Cummings, 1978. (Chapter 11)

ANDERSON, JAMES L., *Principles of relativity physics*. New York: Academic Press, 1967.

ARNOLD, V. I., *Mathematical methods of classical mechanics*. Translated from the Russian edition of 1974. New York: Springer-Verlag, 1978. (安藤韶一, 蟹江幸博, 丹羽敏雄訳　古典力学の数学的方法　(岩波書店))

ARNOLD, V. I., AND A. AVEZ, *Ergodic problems of classical mechanics*. New York: W. A. Benjamin, 1968. (吉田耕作訳　古典力学のエルゴード問題　(吉岡書店))

BERGMANN, PETER GABRIEL, *Introduction to the theory of relativity*. New York: Prentice-Hall, 1942. (田村松平訳　相対性理論序説　(秀潤社))

BORN, MAX, *The mechanics of the atom*. Translated by J. W. Fisher. London: G. Bell and Sons, 1927. Reprint, New York: Ungar, 1967. (Chapters 9, 10, 11) (岩本文明訳　原子力学の諸問題　(三省堂))

BROWN, ERNEST W., *An introductory treatise on the lunar theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1896. Reprint, New York: Dover, 1960.

BROUWER, DIRK, AND GERALD M. CLEMENCE, *Methods of celestial mechanics*. New York: Academic Press, 1961.

BRUNET, PIERRE, *Etude historique sur le principe de la moindre action*. Paris: Herrmann et Cie, 1938. (Chapter 8)

BYLERLY, WILLIAM ELWOOD, *An introduction to the use of generalized coordinates in mechanics and physics*. Boston: Ginn, 1913. New York: Dover, 1965.

CHEN, YU, *Vibrations: Theoretical methods*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1966. (Chapter 6)

CRANDALL, STEPHEN H., et al., *Dynamics of mechanical and electromechanical systems*. New York: McGraw-Hill, 1968.

DANBY, J. M. A., *Fundamentals of celestial mechanics*. New York: Macmillan, 1962. (Chapters 3, 11)

DEUTSCH, RALPH, *Orbital dynamics of space vehicles*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall. 1963. (Chapter 11)

DZIOBEK, OTTO, *Mathematical theories of planetary motions*. Register Publishing Co., 1892. Reprint, New York: Dover, 1962.

EINSTEIN, ALBERT, *The meaning of relativity*, 5th ed. Princeton: Princeton University Press, 1956. (Chapter 7) (矢野健太郎訳　相対論の意味　(岩波書店))

FINLAY-FREUNDLICH, E., *Celestial mechanics*. New York: Pergamon Press, 1958.

FOCK, V., *The theory of space, time and gravitation*, 2nd English ed. New York: Pergamon (Macmillan), 1964. (Chapter 7)

FRENCH, A. P., *Special relativity*. (The M.I.T. Introductory Physics Series.) New York: W. W. Norton, 1968. (Chapter 7)

GARFINKEL, BORIS, *The Lagrange-Hamilton-Jacobi mechanics*, in *Space mathematics, Part 1*, J. Barkley Rosser, ed., *Lectures in applied mathematics*, vol. 5. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1966. (Chapters 10, 11)

GEYLING, FRANZ T., AND H. ROBERT WESTERMAN, *Introduction to orbital mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1971.

GIACAGLIA, G. E. O., *Perturbation methods in non-linear systems*. New York: Springer-Verlag, 1972. (Chapter 11)

GOSSICK, B. R., *Hamilton's principle and physical systems*. New York: Academic Press, 1967. (Chapter 2)

GRAY, ANDREW, *A treatise on gyrostatics and rotational motion*. London: Macmillan, 1918. New York: Dover, 1959. (Chapter 5)

GRAMMEL, R., *Der Kreisel*. Berlin: Springer-Verlag, 1950.

HAGEDORN, R., *Relativistic kinematics*. New York: W. A. Benjamin, 1963. Reprint, 1973. (Chapter 7)

HAGIHARA, YUSUKE, *Celestial mechanics*, vol. 2, parts 1 & 2, *Perturbation theory*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1972. (Chapter 11)

KERNER, EDWARD H., ed., *The theory of action-at-a-distance in relativistic particle dynamics*. A reprint collection. New York: Gordon and Breach, 1972.

KLEIN, FELIX, *The mathematical theory of the top*. New York: Scribners, 1897. Reprinted in *Congruence of sets and other monographs*, Bronx, N.Y.: Chelsea, 1967.

KLEIN, FELIX, AND ARNOLD SOMMERFELD, *Über die Theorie des Kreisels* (4 vols.). Leipzig: B. G. Teubner, 1897–1910. Reprint, New York: Johnson, 1965. (Chapter 5)

KOTKIN, G. L., AND V. G. SERBO, *Collection of problems in classical mechanics*. Translated from Russian. Oxford: Pergamon Press, 1971.

KURTH, RUDOLF, *Introduction to the mechanics of the solar system*. New York: Pergamon Press, 1969.

LEHNERT, BO, *Dynamics of charged particles*. Amsterdam: North-Holland, 1964. (Chapter 11)

LEIMANIS, EUGENE, *The general problem of motion of coupled rigid bodies about a fixed point*. New York: Springer-Verlag, 1965. (Chapter 5)

MACH, ERNST, *The science of mechanics*, 5th English ed. LaSalle, Ill.: Open Court, 1942. (Chapter 1) (伏見　譲訳　マッハ力学　(講談社))

MAGNUS, KURT, *Kreisel Theorie und Anwendungen*. Berlin: Springer-Verlag, 1971.

MANN, RONALD A., *The classical dynamics of particles: Galilean and Lorentz Relativity*. New York: Academic Press, 1974. (Chapter 7)

MCCUSKEY, S. W., *Introduction to celestial mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963. (Chapter 3)

MERCIER, ANDRÉ, *Analytical and canonical formalism in physics*. Amsterdam: North-Holland, 1959.

MISNER, CHARLES W.; KIP S. THORNE; JOHN ARCHIBALD WHEELER, *Gravitation*. San Francisco: Freeman, 1973. (Chapter 7)

MØLLER, C., *The theory of relativity*, 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 1972. (永田，伊藤訳　相対性理論　(初版) (みすず書房)

MOSER, JURGEN, *Stable and random motions in dynamical systems, with special emphasis on celestial mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1973. (Chapter 11)

MOULTON, FOREST RAY, *An introduction to celestial mechanics,* 2nd ed. New York: Macmillan, 1914.

NORTHROP, THEODORE G., *The adiabatic motion of charged particles.* New York: Interscience, 1963. (Chapter 11)

OLSON, HARRY F., *Solution of engineering problems by dynamical analogies,* 2nd ed. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1966 (corrected reprint of *Dynamical analogies,* 2nd ed., 1958). (Chapter 2)

PLUMMER, H. C., *An introductory treatise on dynamical astronomy.* Cambridge: Cambridge University Press, 1918. Reprint, New York: Dover, 1960. (Chapter 3)

POINCARÉ, HENRI, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (3 vols.). Paris: Gauthier-Villars, 1892-99. Reprint, New York: Dover, 1957. (福原満州雄，浦太郎訳 常微分方程式 （共立出版))

ROUTH, EDWARD JOHN, *Dynamics of a system of rigid bodies.* Part I, *Elementary Part,* 5th ed. London: Macmillan, 1891. Part II, *Advanced Part,* 5th ed. London, Macmillan, 1892. (Chapter 5)

SANTILLI, RUGGERO MARIO, *Foundations of theoretical mechanics I.* New York: Springer-Verlag, 1978.

SARD, R. D., *Relativistic mechanics: Special relativity and classical particle dynamics.* New York: W. A. Benjamin, 1970. (Chapter 7)

SCHWARTZ, HERMAN M., *Introduction to special relativity.* New York: McGraw-Hill, 1968. (Chapter 7)

SEIGEL, CARL LUDVIG, AND J. K. MOSER, *Lectures on celestial mechanics.* Translated from German. New York: Springer-Verlag, 1971.

SMART, W. M., *Celestial mechanics.* New York:Wiley, 1953. Reprint, 1961.

SOPER, DAVISON EUGENE, *Classical field theory.* New York: Wiley, 1976.

STERNBERG, SHLOMO, *Celestial mechanics.* New York: W. A. Benjamin, 1969.

STERNE, THEODORE E., *An introduction to celestial mechanics.* New York: Interscience, 1960.

TISSERAND, F., *Traité de mécanique céleste, Tome I, Perturbation des planètes* . . . . Paris: Gauthier-Villars, 1889. New printing, 1960.

TRUESDELL, C., *Essays in the history of mechanics.* New York: Springer-Verlag, 1968. (Chapter 1)

TRUESDELL, C., AND R. A. TOUPIN, *The classical field theories,* in vol. 3, part 1 of *Encyclopedia of Physics.* Berlin: Springer-Verlag, 1960. (Chapter 1)

WINTNER, AUREL, *The analytical foundations of celestial mechanics.* Princeton: Princeton University Press, 1941.

WRIGLEY, WALTER; WALTER M. HOLLISTER; AND WILLIAM G. DENHARD, *Gyroscopic theory, design and instrumentation.* Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1969. (Chapter 5)

YOURGRAU, WOLFGANG, AND STANLEY MANDELSTAM, *Variational principles in dynamics and quantum theory,* 3rd ed. Philadelphia: Saunders, 1968.

内山龍雄　一般相対性理論　裳華房　1978

内山龍雄　相対性理論（岩波全書）　岩波書店　1977
平川浩正　相対論　共立出版　1971
スメール・ハーシュ（田村，水谷，新井訳）　力学系入門　岩波書店　1976

古典力学にとって興味のある内容をもった，物理学の他の分野および数学に関する参考書

ARFKEN, GEORGE, *Mathematical methods for physicists*. New York: Academic Press, 1966. Second ed., 1970. (Chapter 4)（権平健一郎，神原武志，小山直人訳　基礎物理数学 1, 2, 3　（講談社））

BADGER, PARKER H., *Equilibrium thermodynamics*. Boston: Allyn and Bacon, 1967. (Chapter 8)

BARUT, A. O., *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*. New York: Macmillan, 1964. (Chapters 7, 12)

BLISS, GILBERT AMES, *Calculus of variations*. Carus Mathematical Monographs, 1. LaSalle, Ill.: Open Court, 1925. (Chapter 2)

BOCHER, MAXIME, *Introduction to higher algebra*. New York: Macmillan, 1907.

BORN, MAX, AND PASCUAL JORDAN, *Elementare Quantenmechanik*. Berlin: Julius Springer, 1930. Ann Arbor: J. W. Edwards, 1946.

BORN, MAX, AND EMIL WOLF, *Principles of optics*. London: Pergamon Press, 1959. Fifth ed., Oxford: Pergamon Press, 1975. (Chapter 10)（草川　徹，横田英嗣訳　光学の原理 I, II, III　（東海大学出版会））

BRAND, LOUIS, *Vector and tensor analysis*. New York: Wiley, 1947. (Chapter 5)

BRILLOUIN, LEON, *Tensors in mechanics and elasticity*. Translated from the 1938 French edition. New York: Academic Press, 1964. (Chapter 10)

BORISENKO, A. I., AND I. E. TARAPOV, *Vector and tensor analysis with applications*. Translated and revised by R. A. Silverman. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1968. (Chapter 4)

CARATHÉODORY, C., *Calculus of variations and partial differential equations*. San Francisco: Holden-Day, vol. 1, 1965; vol. 2, 1967. Translated from German edition, 1935; revised, 1956. (Chapters 9, 10)

CASIMIR, H. B. G., *Rotation of a rigid body in quantum mechanics*. Groningen: J. B. Wolters, 1931.

CONDON, E. U., AND G. H. SHORTLEY, *The theory of atomic spectra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1935.

COURANT, R., AND D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, 2 vols. New York: Interscience, vol. 1, 1953; vol. 2, 1962. (Chapters 2, 8, 10)（斉藤利弥監訳，数理物理学の方法，1～4　（東京図書））

CRONIN, JEREMIAH A.; DAVID F. GREENBERG; AND VALENTINE L. TELEGDI, *University of Chicago graduate problems in physics, with solutions*. Chicago: University of Chicago Press, 1977.

DAVYDOV, A. S., *Quantum mechanics*. Oxford: Pergamon Press, 1965. Second ed.,

1976.（近桂一郎他訳　量子力学 I, II, III　（宇野書店））

Dirac, Paul A. M., *Lectures on quantum mechanics*. New York: Yeshiva University, 1964.

Eisele, John A., and Robert M. Mason, *Applied matrix and tensor analysis*. New York: Wiley-Interscience, 1970.

Eisenhart, Luther Pfahler, *Continuous groups of transformation*. Princeton: Princeton University Press, 1933. Reprint, New York: Dover, 1961.

Elsgolc, L. E., *Calculus of variations*. Translated from Russian. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.（瀬川富士訳　科学者・技術者のための変分法　（ブレイン図書））

Gardner, Martin, *New mathematical diversions from Scientific American*. New York: Simon & Schuster, 1971.

Gelfand, I. M., and S. V. Fomin, *Calculus of variations*. Translated and edited by Richard A. Silverman. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1963.（関根智明訳　変分法　（文一総合出版））

Gibbs, J. Willard, *Vector analysis*. Edited by E. B. Wilson. New York: Scribner, 1901. New Haven: Yale University Press, 1931.

Goertzel, Gerald, and Nunzio Tralli, *Some mathematical methods of physics*. New York: McGraw-Hill, 1960.

Guillemin, Ernst A., *The mathematics of circuit analysis*. New York: Wiley, 1949. (Chapter 6)

Herzberg, Gerhard, *Infrared and Raman spectra of polyatomic molecules*. New York: D. Van Nostrand, 1945. (Chapters 4, 6)

Hess, Seymour L., *Introduction to theoretical meterology*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1959. (Chapter 4)

Hildebrand, Francis B., *Methods of applied mathematics*, 2nd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965.

Hirschfelder, Joseph O.; Charles F. Curtiss; and R. Byron Bird, *Molecular theory of gases and liquids*. New York: Wiley, 1954. Slightly revised edition, 1964. (Chapter 3)

Jackson, John David, *Classical electrodynamics*. New York: Wiley, 1962. Second ed., 1975.

Jeffreys, H., and Bertha S. Jeffreys, *Methods of mathematical physics*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1950. Third ed., 1972. (Chapters 4, 6)

Kaplan, Wilfred, *Advanced calculus*, 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973.

Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics, non-relativistic theory*, 2nd ed., in vol. 3 of *Course of theoretical physics*. Oxford: Pergamon Press, 1965. Third ed., 1977.（好村滋洋, 井上健男, 佐々木健訳　量子力学 1,2　（東京図書））

Lang, Serge, *A second course in calculus*, 3rd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973.

Lindsay, Robert Bruce, and Henry Margenau, *Foundations of physics*. New York: Wiley, 1936. (Chapters 1, 8)

LIPSCHUTZ, SEYMOUR, *Theory and problems of linear algebra*. Schaum's Outline Series. New York: McGraw-Hill, 1968.（金井省二訳　集合論30題　（マグロウヒル））

LOEBL, ERNEST M., ed., *Group theory and its applications*, vol. II. New York: Academic Press, 1971. (Chapters 3, 9, 10)

LOOMIS, LYNN H., AND SHLOMO STERNBERG, *Advanced calculus*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968.

MARGENAU, HENRY, AND GEORGE MOSELEY MURPHY, *The mathematics of physics and chemistry*. New York: D. Van Nostrand, 1943. New York: Krieger, 1976.（佐藤次彦，国宗真訳　物理と化学のための数学 I，II（共立出版））

MARION, JERRY B., *Principles of vector analysis*. New York: Academic Press, 1965. Second ed., 1970. (Chapter 4)

MATHEWS, JON, AND R. L. WALKER, *Mathematical methods of physics*. New York: W. A. Benjamin, 1965. Second ed., 1970.

McINTOSH, HAROLD. *See* Loebl, Ernest M.

MERZBACHER, EUGEN, *Quantum mechanics*. New York: Wiley, 1961. Second ed., 1970.

MUNK, WALTER H., AND GORDON J. F. MACDONALD, *The rotation of the earth, a geophysical discussion*. Cambridge: Cambridge University Press, 1960. (Chapter 5)

NERING, EVAR D., *Linear algebra and matrix theory*. New York: Wiley, 1963.

NEWTON, ROGER G., *Scattering theory of waves and particles*. New York: McGraw-Hill, 1966. (Chapter 3)

PANOFSKY, WOLFGANG K. H., AND MELBA PHILLIPS, *Classical electricity and magnetism*, 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.（林忠四郎，西田稔，天野恒雄訳　電磁気学上，下　（吉岡書店））

PARS, L. A., *An introduction to the calculus of variations*. New York: Wiley, 1962. (Chapter 2)

PEARSON, CARL E., ed., *Handbook of applied mathematics*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1974.

PEASE, MARSHAL C., III, *Methods of matrix algebra*. New York: Academic Press, 1965.

LORD RAYLEIGH, *The theory of sound* (2 vols.), 2nd ed. London: Macmillan, 1894–1896. New York: Dover, 1945. (Chapters 1, 12)

ROSE, M. E., *Elementary theory of angular momentum*. New York: Wiley, 1957.（山内恭彦，森田正人訳　角運動量の基礎理論　（みすず書房））

ROZENTAL, S., *Niels Bohr: His life and work*. Amsterdam: North-Holland, 1967. New York: Wiley, 1967.（豊田利幸訳　ニールス・ボーア　（岩波書店））

RUND, HANNO, *The Hamilton–Jacobi theory in the calculus of variations*. London: D. Van Nostrand, Ltd., 1966. (Chapters 2, 7, 8, 9)

SCHIFF, LEONARD I., *Quantum mechanics*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1968.（井上　健訳　量子力学上，下　（吉岡書店））

SMIRNOV, V. I., *A course of higher mathematics* (5 vols.). Translated from Russian.

Oxford: Pergamon Press, 1964.（弥永昌吉他監修　スミルノフ高等数学教程 1 ～ 13　（共立出版））

SOMMERFELD, ARNOLD, *Atomic structure and spectral lines*. Translated by H. L. Brose from the 5th German edition of 1931. New York: Dutton, 1934. (Chapter 10)（増田秀行訳　原子構造とスペクトル線上，下　（講談社））

STACEY, FRANK D., *Physics of the earth*. New York: Wiley, 1969. Second ed., 1977. (Chapters 4, 5)

STOLL, ROBERT R., *Linear algebra and matrix theory*. New York: McGraw-Hill, 1952. Reprint, New York: Dover, 1969. (Chapter 4)

STRANG, GILBERT, *Linear algebra and its applications*. New York: Academic Press, 1976.

SYNGE, J. L., *Geometrical optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1937.

SYNGE, J. L., AND A. SCHILD, *Tensor calculus*. Toronto: University of Toronto Press, 1949. (Chapters 4, 6, 7)

TOLMAN, RICHARD C., *The principles of statistical mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1938. (Chapter 9)

TURNBULL, H. W., *The theory of determinants, matrices and invariants*, 2nd ed. London: Blackie, 1945.

VAN VLECK, J. H., *Quantum principles and line spectra*. Bulletin No. 54 of the National Research Council. Washington D.C.: National Research Council, 1926. (Chapter 10)

WEINSTOCK, ROBERT, *Calculus of variations*. New York: McGraw-Hill, 1952. (Chapter 2)

WENTZEL, GREGOR, *Quantum theory of fields*. Translated by C. Houtermans and J. W. Jauch. New York: Interscience, 1949. (Chapter 12)

WEYL, HERMAN, *The classical groups*. Princeton: Princeton University Press, 1939. Second ed., reprint of first, with additions, 1946.

WHITHAM, G. B., *Linear and nonlinear waves*. New York: Wiley, 1974.

WIGNER, EUGENE P., *Group theory, and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. Translated from German by J. J. Griffin. New York: Academic Press, 1959.（森田正人，森田玲子訳．群論と量子力学　（吉岡書店））

WILLS, A. P., *Vector analysis, with an introduction to tensor analysis*. New York: Prentice-Hall, 1931. New York: Dover, 1931. (Chapter 5)

WILSON, E. BRIGHT, JR.; J. C. DECIUS; AND PAUL C. CROSS, *Molecular vibrations, the theory of infrared and Raman vibrational spectra*. New York: McGraw-Hill, 1955. (Chapter 6)

ZEMANSKY, MARK W., *Heat and thermodynamics*, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 1968.

寺沢寛一　自然科学者のための数学概論（改訂版）　岩波書店　1954
寺沢寛一　同　上　（応用編）　岩波書店　1960
松島与三　多様体入門　裳華房　1965
山内恭彦　物理数学　岩波書店　1963

高橋健人　物理数学（新数学シリーズ）　培風館　1958
安達忠次　ベクトルとテンソル（新数学シリーズ）　培風館　1957
安達忠次　ベクトル解析（改訂版）　培風館　1961
田代嘉宏　テンソル解析　裳華房　1981
古屋　茂　行列と行列式（新数学シリーズ）　培風館　1957
佐武一郎　線形代数学　裳華房　1974
山内恭彦　代数学と幾何学　生産技術センター　1972
山内恭彦　回転群とその表現　岩波書店　1957
犬井，田辺，小野寺　応用群論（増補版）　裳華房　1980
宮島龍興　電磁気学　みすず書房　1952
高橋秀俊　電磁気学（物理学選書）　裳華房　1959
熊谷寛夫　電磁気学の基礎　裳華房　1975
砂川重信　理論電磁気学（第2版）　紀伊国屋書店　1973
飯田修一　電磁気学上，下　丸善　1975
霜田・近角　大学演習電磁気学（全訂版）　裳華房　1980
石黒浩三　光学（第2版）（共立全書）　共立出版　1977
朝永振一郎　量子力学 I，II　みすず書房　1951－53
西島和彦　相対論的量子力学（新物理学シリーズ）　培風館　1973
小谷・梅沢　大学演習量子力学　裳華房　1959
山内・武田　大学演習量子物理学　裳華房　1969
久保亮五　統計力学（改訂版）（共立全書）　共立出版　1971
久保亮五　大学演習熱学・統計力学　裳華房　1961
原島　鮮　熱力学・統計力学（改訂版）　培風館　1970
今井　功　流体力学（前編）　裳華房　1973
巽　友正　流体力学（新物理学シリーズ）　培風館　1982

積分表，数学関数表およびその他の参考文献

ABRAMOWITZ, MILTON, AND IRENE A. STEGUN, eds., *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs and mathematical tables.* NBS Applied Math. Series 55. Washington, D.C.: Government Printing Office, 1964. New York: Dover, 1965.

GRADSHTEYN, I. S., AND I. M. RYZHIK, *Table of integrals, series and products,* 4th ed. Prepared by Yu V. Geronimus and M. Yu Tseytlin. Translated from Russian. New York: Academic Press, 1965.

PEIRCE, B. O., *A short table of integrals,* 3rd ed. Boston: Ginn, 1929. Fourth ed. (by B. O. Peirce and R. M. Foster), Boston: Ginn, 1956. （富久泰明訳　簡約積分表（ブレイン図書））

SELBY, SAMUEL M., ed., *Handbook of mathematical tables.* Cleveland, Ohio: Chemical Rubber Publishing Co. (CRC), 1962.

SPIEGEL, MURRAY R., *Mathematical handbook of formulas and tables.* New York: McGraw-Hill, 1968.

林桂一著　森口繁一増補　高等函数表（第2版）　岩波書店　1967
森口，宇田川，一松著　数学公式 I，II，III（岩波全書）　岩波書店　1956－1960
インゲルスタム，ショーベリー，木下著　応用物理ポケットブック　培風館　1974
東京天文台編　理科年表　丸善　1984

記 号 索 引

p. 631 いろいろな記号を選ぶに当っては，できるだけある一般原理に従うようにした．ベクトルはボールド体（肉太の）のローマ字体で示し，2階あるいはそれより高階のテンソルと行列は肉太のサンセリフ字体で表わされている．ベクトルが特に1階のテンソルとして取り扱われるとき，あるいは1列（あるいは1行）行列によって表わされる場合には，時には肉太のローマ字体で表わすこともあるが，もっともしばしば，サンセリフ字体が用いられている．ギリシャ文字の記号に対しても，ベクトル，テンソルおよび行列に対しては，同じ肉太字体が用いられる．

文字の上の点は，常に時間に関する微分を示す．プライムは，しばしば，ある種の変換を受けた量を示すのに用いられる．第4章では，座標につけたプライムは，空間軸に関するプライムのない空間座標と区別して，剛体軸に関する値を示すものである．しかし後もずっとそうであるわけではない．一般に，プライムはまた，質量中心に相対的なある量を含む記号の印としても用いられる．さらにそれに加えて，プライム記号には多くの他の例外的な用法がある．これらは与えられた議論の文脈の中で明らかになるであろう．しかしながら，2つの例だけは特に注意しておく．実験室系の角（質量中心系の角ではなく）を用いて表わした散乱断面積にはプライム記号がつけてある（152ページを見よ）．また，第7－9節の文字につけられたプライムは，時間のかわりに用いられたパラメーター θ に関する微分を示すものである．

多くの公式の外見を簡潔にするために，時折，いろいろな添字記号が，その添字のついた変数（あるいは指数）に関する微分を示すのに用いられている．（583 f，640脚注および781ページ以下の第12章を見よ）．

正準変換を論じるときには，しばしば元の変数を小文字で表わし，大文字を変換された量に対して用いた．添字0はしばしば，初期値あるいは釣り合いに

おける値を示す．普通行われるように，複素共役は星印（asterisk）で表わした．星印をこれ以外の意味に用いるときには，常に特別に注意してある．

この記号索引は完全であることを意図してはいない．普通に使用されている記号，例えば直交座標(x, y, z)，平面曲座標(r, θ)（あるいはその変種として(r, ϕ), (r, ψ)等），空間極座標(r, θ, ϕ)あるいは，ベクトル解析の記号，に対しては索引を作る必要は殆んどない．一般的にいって，この索引では（曖昧さがあるかもしれない場合を除き），それらの定義のある数ページの中でのみ用いられ，後に同じ意味で再び用いられることがないような，“その場限りの”記号は省かれている．

演習問題の中で定義された記号は，それが広い有用性をもっているか，あるいは曖昧さを生じさせるかもしれない場合を除き，通例索引には入れてない．そのようなものはページ数がイタリック体で示してある．２つあるいはそれより多くのページが記されているときには，第１番目のものは，最初に出てきたところの，しばしば付随的な参考にしかならないページ数である．それに続くページは，より十分な定義や記述が与えられていることを示すものである．

p. 632

ギリシャ文字の記号索引

いろいろな記号

索　　引

（下　　巻）

（イタリックで印刷されているページ数は，演習問題に関するものであることを示す）

ア　行

サ　行

タ 行

ISBN4－8427－0000－9

物理学叢書
編集
小谷正雄
（東京大学名誉教授）
小林稔
（京都大学名誉教授）
井上健
（京都大学名誉教授）
山本常信
（京都大学名誉教授）
高木修二
（大阪大学名誉教授）

〔訳者紹介〕
瀬川富士（せがわとみお）
愛媛大学名誉教授
理学博士
矢野忠（やのただし）
現在愛媛大学 工学部 教授
理学博士
江沢康生（えざわやすお）
現在愛媛大学教養部教授
理学博士

ゴールドスタイン：新版古典力学（下）

1984年1月25日　第1刷発行
1997年6月25日　第6刷発行

瀬川富士
矢野忠
江沢康生

発行者　吉岡誠

京都市左京区田中門前町87
発行所　株式会社 吉岡書店
電(075)781－4747/振替01030-8-4624

昭和堂印刷所・藤沢製本

ISBN4－8427－0210－9

単行本

フント　井上　健・山崎和夫訳 **思想としての物理学の歩み** 上下 上 320頁　下 320頁	物理概念の思想がいかに生成し現代に至っているのか二千数百年に亘る時代的背景や歴史的制約が極めて広いつながりの中でとらえられており，特色ある社会思想史として理科系のみならず人文社会系の人々にも興味深い．
永宮健夫著 **磁性の理論** 240頁	磁性の基本と最前線の重要課題を詳説．学部4年〜院生研究者を対象とし，初歩的な量子力学の知識で理解できるよう配慮され，結果よりもそこに至る道程を一緒に考えながら歩くという態度がとられている．
コゼル他　青木　薫・青山秀明訳 **物理学演習 モスクワの森** ——ＭＰＴＩ物理問題集——　288頁	本書の問題はモスクワ物理工科大学が，学生に要求する一般物理教程の水準である．殆どがオリジナルで，実験から出てきたより実際的な問題が好んで入れられ，物理が対象とする世界が見えてくるよう配慮されている．
F. D. ピート　青木　薫　訳 **常温核融合** ——科学論争を起こす男たち——　272頁	1989年春，常温核融合達成のニュースが世界中を駆けめぐった．本書はこの事件の事実関係や背景から説き起こし，エネルギー問題や環境汚染の問題まで視野に入れながら核融合の問題点を明らかにする．
ハイゼンベルク他　青木　薫訳 **物理学に生きて** —巨人たちの思索の軌跡—　152頁	20世紀物理学の巨人たちが，物理と共に歩んだ半生を自ら語った講演記録．深い思索の軌跡は時代を越えて，現代を生きる我々にも多くの示唆を与えてくれるだろう．
リオーダン　青木　薫訳 **クォーク狩り** — 自然界の新階層を追って —　496頁	物質の「究極」の構成要素クォークをめぐる物理学を，ノーベル賞受賞実験を軸に描く．人間のドラマもまじえながら，最先端の物理学を，わかりやすく，かつ感動的に伝える．
ギボンズ・ウィットロック　吉岡・白鳥監訳 **商品としての科学** —開放的学者共同体への脅威—　320頁	科学が政治や経済における強力な道具となった現代において，科学者が自分の研究をどう進めるのか．科学・技術政策はどのようにたてられるのか，重要な問題点を探る．
タマシ・ゲスチ　秋葉巴也訳 **ニューラルネットワークの物理モデル** 184頁	本書は固体物理学者ホップフィールドの考案したモデルとその発展を中心に，物理学者を自認する著者が神経回路網を解説した異色の書．中でも特に統計力学に基づく神経回路網の能力評価の詳しい説明は類を見ない．
リオーダン・シュラム　青木　薫訳 **宇宙創造とダークマター** —素粒子物理からみた宇宙論—　360頁	全体を通しての論理の流れを重視し，たくみな構成で，現在の宇宙物理における暗黒物質の重要性が，袋小路に獲物を追い込むように論じられる．説明のしかた・オリジナルな図など，平易に解説するための工夫がなされている．